Ein bisschen unbestimmt?

Jörg J. Buchholz

29. September 2011

Einleitung

Studierende des ersten Semesters erinnern sich manchmal noch an rudimentäre Erfahrungen mit Grenzwerten und unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$ aus ihrer Schulzeit. Gleichzeitig hat sich die Regel von L'Hospital als „das" Lösungsverfahren für unbestimmte Ausdrücke in ihr mathematisches Gedächtnis eingegraben. Der Vortrag beschreibt den Kulturschock, den diese Studierenden erleiden, wenn sie erfahren müssen, dass die Regel von L'Hospital in vielen Fällen versagt, moderne Computer-Algebra-Systeme ganz andere Lösungsverfahren verwenden und sich dann trotzdem nicht einigen können, was denn 0^0 nun wirklich ist.

Immer nur L'Hospital?

Wenn Schüler der Fachoberschulen, Berufsoberschulen oder Gymnasien im Mathematikunterricht schon erste Erfahrungen mit der Berechnung von Grenzwerten und unbestimmten Ausdrücken gesammelt haben, war in vielen Fällen die Regel von L'Hospital [3] das entscheidende Werkzeug, um unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, ∞^0 und 1^∞ zu berechnen. Wie häufig zu beobachten, bleibt dabei aber meist nur der Algorithmus selbst („Bei unbestimmten Ausdrücken Zähler und Nenner einzeln ableiten ...")

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{L'H.}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

im Gedächtnis haften und weniger die Randbedingungen, dass die Regel nur anwendbar ist, wenn der Grenzwert existiert und Zähler und Nenner entweder beide null oder beide unendlich sind:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Diese Studierenden können daher im ersten Semester schon einfache unbestimmte Ausdrücke wie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

berechnen. Einige wissen sogar schon (bzw. noch), wie sie beispielsweise Ausdrücke der Form 1^∞ mittels Logarithmierung, Doppelbruchumwandlung, Grenzwertbildung und Delogarithmierung behandeln müssen:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ldots = \mathrm{e}$$

Aber fast alle geben (beispielsweise in einer Klausur) nach der zweiten oder dritten direkten Anwendung der Regel von L'Hospital entnervt auf, wenn sie mit einem Ausdruck wie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{42} x}{x^{42}}$$

konfrontiert werden, obwohl sie doch die Reihenfolge von Potenzieren und Grenzwertbildung einfach umkehren könnten, um das Problem so wieder auf ein bekanntes zurück zu führen. Das Vertrauen in die Regel von L'Hospital beginnt weiter zu bröckeln, wenn die Studierenden erkennen, dass der Ausdruck

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \ldots ?$$

zwar „irgendwie unbestimmt" ist, weil ja $\sin\infty$ nicht eindeutig definiert ist. Viele Studierende erinnern sich aber daran, dass der Sinus vom Betrag her immer kleiner eins ist, somit ein Ausdruck vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegt und eine erste Anwendung der Regel von L'Hospital möglich ist. Der dabei entstehende Ausdruck ist zwar wegen $\cos\infty$ wieder nicht definiert, entspricht aber weder $\frac{0}{0}$ noch $\frac{\infty}{\infty}$, so dass sich eine weitere Anwendung der Regel von L'Hospital verbietet. Viele Studierende analysieren diese Randbedingung aber leider nicht, wenden die Regel von L'Hospital erneut an, kürzen die entstehenden Sinusfunktionen und unterstreichen das (natürlich falsche) Ergebnis -1 doppelt.

An dieser Stelle bietet es sich dann an, die Studierenden in das bei Ingenieuren beliebte Verfahren der „Abschätzung und Vernachlässigung" einzuführen und am Beispiel zu argumentieren, dass die Sinusfunktion gegenüber dem gegen unendlich strebenden x so klein bleibt, dass sie vernachlässigt werden kann:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \varepsilon}{x + \varepsilon} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$$

An einem weiterem Beispiel lässt sich sehr schön zeigen, dass die mehrfache Anwendung der Regel von L'Hospital manchmal wieder zum Ursprungsproblem zurück und damit in eine Sackgasse führt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}2x} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x} \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \ldots ?$$

Als L'Hospital-Alternative führt auch hier die Vernachlässigung der eins im Nenner sehr schnell zur richtigen Lösung.

Wenn die Studierenden Zugriff auf ein Computer-Algebra-System (CAS) wie das im Folgenden verwendete MATLAB haben, nutzen sie gerne die Möglichkeit, sich „mal schnell" den Graphen (s. Abb. 1)

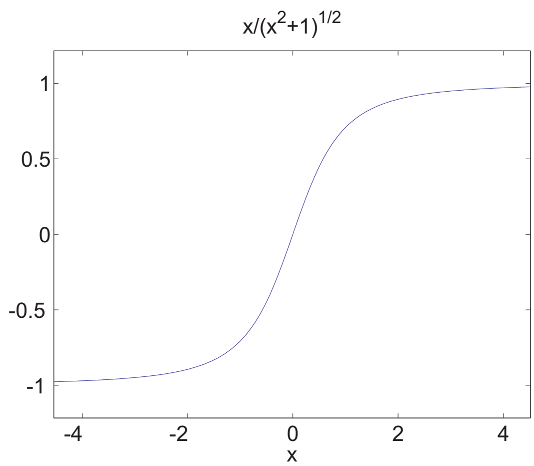

Abbildung 1: Plot von $\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

der fraglichen Funktion skizzieren zu lassen (`ezplot`), um ein „Gefühl" für den Grenzwert zu bekommen oder sie setzen eine „ganz große" Zahl ein (`subs`), um den

Grenzwert wie mit einem Taschenrechner „abzuschätzen“:

```
>> syms x
>> f = x/(x^2 + 1)^(1/2);
>> ezplot (f)
>> subs (f, x, 1e100)
ans =
     1
```

Nicht alle Studierenden wissen, dass jedes ernst zu nehmende CAS einen eigenständigen Befehl besitzt (`limit`), um Grenzwerte wirklich zu berechnen:

```
>> limit (f, x, inf)
ans =
     1
```

Dass dieses bei Studierenden beliebte „Skizzieren und Einsetzen“ manchmal gründlich daneben geht, zeigt das folgende, zugegebenermaßen etwas akademische Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\ln\left(\ln\left(\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right)-1}}$$

Sowohl die Skizze (s. Abb. 2)

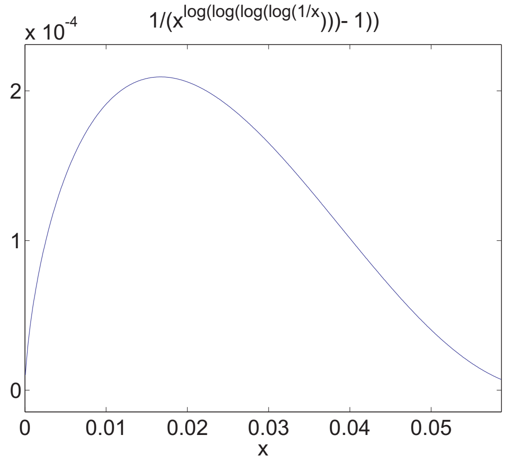

Abbildung 2: Plot von $\frac{1}{x^{\ln\left(\ln\left(\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right)-1}}$

als auch das Einsetzen einer sehr kleinen Zahl

```
>> f = 1/x^(log (log ...
   (log (log (1/x)))) - 1);
>> ezplot (f)
>> subs (f, x, 1e-100)
ans =
  4.8704e-048
```

legen die Vermutung sehr nahe, dass die Funktion durch den Ursprung verläuft. Die Verblüffung der Studierenden ist dann um so größer, wenn der rechtsseitige Grenzwert nach Meinung des CAS gegen unendlich strebt:

```
>> limit (f, x, 0, 'right')
ans = Inf
```

Wenn dies in Anbetracht der Skizze wirklich der Fall sein soll, muss in unmittelbarer Nähe des Ursprungs ein Minimum der Funktion existieren. Und tatsächlich findet das CAS eine verschwindende erste Ableitung der Funktion bei einem unglaublich kleinen x-Wert:

```
>> solve (diff (f))
ans = .28084387852340e-579202
```

Der unerwartete Grenzwert lässt sich durch direktes Einsetzen von null auch „manuell“ leicht verifizieren, da das Beispiel gar keinen unbestimmten Ausdruck darstellt und eine Berücksichtigung von $\frac{1}{0} = \infty$, $\ln\infty = \infty$ und $0^\infty = 0$ sofort zum richtigen Grenzwert führt.

Manchmal lässt sich ein unbestimmter Ausdruck auch ohne die Anwendung der Regel von L'Hospital durch rein algebraische Umformungen berechnen:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln x}} = 0$$

Ebenfalls ohne die Regel von L'Hospital kommt das in seiner Verallgemeinerung (*Generalized Series Expansion*) in vielen CAS verwendete Entwickeln unbestimmter Ausdrücke in Reihen aus:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+sx+O\left(x^2\right)-1}{x} = \lim_{x\to 0} s+O\left(x\right) = s$$

Im Beispiel wurde der Zähler in eine nach dem linearen Glied abgebrochene Taylorreihe entwickelt, aus deren Elementen (inklusive des Reihenrestes) dann jeweils ein x heraus gekürzt werden konnte.

Was ist eigentlich 1^∞?

Schreiben Sie mal den schlichten Ausdruck 1^∞ an die Tafel und lassen Sie Ihre Studierenden darüber philosophieren ...

Üblicherweise kristallisiert sich dabei schnell eine Mehrheit heraus, die die Meinung vertritt, dass es doch völlig egal sei, ob man zwei Einsen miteinander multipliziert oder zweiundvierzig oder unendlich viele; das Ergebnis bliebe doch immer eins. Einige Studierende sind da vorsichtiger und argumentieren, dass der Ausdruck gegen null geht, wenn „die eins nur ein bisschen kleiner als eins ist" aber gegen unendlich geht, wenn „die eins nur ein bisschen größer als eins ist" und man ihn deshalb als „unbestimmt" bezeichnen müsse. Eine noch kleinere Studierendengruppe zieht sich an dieser Stelle ganz pragmatisch dadurch aus der Affäre, dass sie konstatiert, schon die Frage sei falsch, man dürfe den an sich gar nicht definierten Ausdruck 1^∞ überhaupt nicht isoliert betrachten, sondern müsse immer den Kontext berücksichtigen, in dem er entstehe. Wenn Sie Glück haben, beginnt dann noch die Diskussion darüber, ob denn nun „unbestimmt" und „nicht definiert" unterschiedliche Eigenschaften eines Ausdrucks sind und wie die genaue Definition von „nicht definiert" lautet.

Sie können sich jetzt als Spielverderber unbeliebt machen und die Studierenden auffordern, doch einfach ihr CAS bezüglich 1^∞ zu konsultieren. MATLAB selbst beispielsweise meint, dass der Ausdruck unbestimmt (`NaN` = Not a Number, nicht definiert) ist:

```
>> 1^inf
ans =
   NaN
```

Dramatisch wird es allerdings, wenn Studierende verstanden haben, dass in der Symbolic Math Toolbox unter MATLAB ein MuPAD-Kernel residiert, der für MATLAB alle symbolischen Ausdrücke berechnet und wenn sie MATLAB zwingen, die Berechnung von 1^∞ an MuPAD weiter zu reichen, indem sie die numerische eins durch eine symbolische eins ersetzen:

```
>> sym(1)^inf
ans =
1
```

Plötzlich liefert ein Programm zwei unterschiedliche Ergebnisse, je nachdem, welche „Schicht" den Ausdruck gerade berechnet. Und wenn man dann noch weitere CAS mit 1^∞ konfrontiert, erkennt man in Tab. 1 mit Schrecken, dass das Chaos Methode hat:

Matlab 7.0.4.365	NaN
Maple 9.5	1
Octave 2.1.50	NaN
Reduce 3.6	1
Mathematica 5	NaN
Maxima 5.9.1	1
Derive 6	NaN
MuPAD light 2.5.3	1

Tabelle 1: 1^∞ in verschiedenen CAS

Selbst die beiden kommerziellen CAS-Marktführer Maple und Mathematica verwirren den Anwender mit unterschiedlichen Ergebnissen.

Die analoge Diskussion, ob der Ausdruck 0^0 unbestimmt, eins oder gar null ist, wird interessanterweise schon seit mehreren Jahrhunderten geführt und hat seinen Weg sogar in die Mathematik-FAQ gefunden [2]. Während schon Leonard Euler (1707–1783) $0^0 = 1$ definierte, zog Augustin Louis Cauchy es 1821 vor, den Ausdruck als unbestimmt zu bezeichnen. Im Jahre 1834 versuchte August Ferdinand Möbius, die Definition $0^0 = 1$ zu stützen und veröffentlichte den „Beweis", dass

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = 1$$

wenn

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

Seine Beweisführung konnte allerdings schnell mit dem Beispiel

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \qquad g(x) = x$$

widerlegt werden. Erst 1977 zeigten Louis M. Rotando und Henry Korn, dass Möbius' Aussage nur für Funktionen gilt, die im Ursprung analytisch sind.

Dessen ungeachtet bezeichnet Mathematica (genau wie die meisten Taschenrechner, die die Studierenden aus ihrer Schulzeit mit bringen) 0^0 vorsichtshalber lieber weiterhin als unbestimmt (*Indeterminate*), während sich die übrigen untersuchten CAS auf $0^0 = 1$ geeinigt haben. Selbst „Taschenrechner" wie der Microsoft-Rechner von Windows XP oder der (erfreulich leistungsfähige) Googlerechner[1] teilen die Auffassung, dass $0^0 = 1$ sein sollte.

Natürlich spricht nichts dagegen, die Unstetigkeitsstelle der in Abb. 3 skizzierten Funktion x^y im „positiven" Ursprung durch den Wert eins zu definieren.

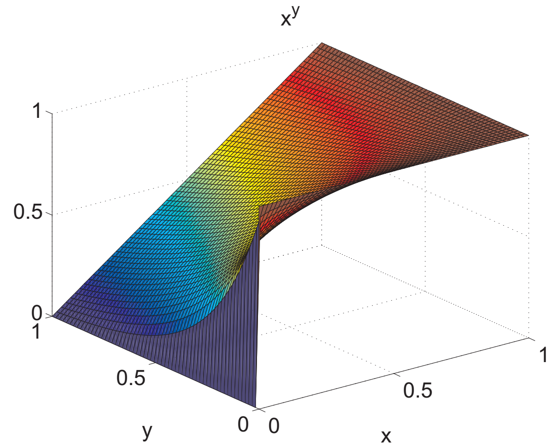

Abbildung 3: Plot von x^y

Die Begründungen hierfür erscheinen allerdings teilweise etwas abenteuerlich.

So fällt es doch etwas schwer einzusehen, warum die Variation mit Wiederholung ($V_W(n;k) = n^k$), also die Anzahl der unterschiedlichen Ziehungen von null Kugeln aus einer Urne mit null Kugeln – unter Berücksichtigung der Reihenfolge(!) und mit Zurücklegen(!) – ausgerechnet eins ergeben soll.

[1] Tippen Sie mal `0^0`, `sqrt(-9)` oder `sin(pi/4)` unter `www.google.de` ein

Auch die von Cleve Moler (Autor der ersten MATLAB-Version) in einer usenet-Diskussion geäußerte Erklärung, warum MATLAB $0^0 = 1$ setzt

> „However, if x and y -> 0 at the same rate, then the limit of x^y is 1.“

erscheint vor dem Hintergrund, dass die gleiche Argumentation ja auch für $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{x}{y}$ gelten könnte, MATLAB $\frac{0}{0}$ aber als unbestimmt[2] definiert, doch etwas fragwürdig.

Stichhaltiger erscheint da möglicherweise die Erklärung, dass der Binomische Satz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

auch für $x = 0$ und $y = n = 1$ gelten sollte:

$$\begin{aligned}(0+1)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} 0^k 1^{1-k} \\ 1 &= \binom{1}{0} 0^0 1^{1-0} + \binom{1}{1} 0^1 1^{1-1} \\ 1 &= 0^0\end{aligned}$$

In die gleiche Richtung zielt die vielleicht etwas anschaulichere Argumentation, dass das Polynom $ax^2 + bx + c$ sich ja auch als $ax^2 + bx^1 + cx^0$ schreiben ließe und dass sein Wert an der Stelle $x = 0$ natürlich

$$a0^2 + b0^1 + c0^0 = c$$

sein sollte.

[2]Die Tatsache, dass MATLAB $\frac{0}{0}$ nicht berechnen kann, ist nicht damit zu begründen, dass die Division durch null nicht definiert ist. MATLAB hat den Körper der reellen Zahlen durch die Elemente $\pm\infty$ erweitert und betreibt damit sehr wohl Arithmetik: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0, \ldots$

Fazit

Zusammenfassend erscheint es sinnvoll, bei Studierenden frühzeitig ein Bewusstsein dafür zu wecken, dass sich moderne CAS bei der Berechnung von Grenzwerten nicht mehr auf einfache heuristische Verfahren wie die Anwendung der Regel von L'Hospital verlassen müssen und Studierende daher selten durch nicht berechnete Grenzwerte enttäuscht werden; dass es aber auf der anderen Seite bei der Definition so elementarer Ausdrücke wie 1^∞ interessanterweise nach wie vor überhaupt keine Einigkeit unter Mathematikern und damit auch nicht in den von ihnen geschriebenen CAS gibt.

Literatur

[1] GRUNTZ, Dominik: *On Computing Limits in a Symbolic Manipulation System*, ETH Zürich, Diss., 1996. `ftp://ftp.inf.ethz.ch/pub/publications/dissertations/th11432.ps.gz`

[2] LOPEZ-ORTIZ, Alex: *What is 0^0?* `http://www.faqs.org/faqs/sci-math-faq/specialnumbers/0to0/`. Version: 09 2011

[3] WEISSTEIN, Eric W.: *L'Hospital's Rule*. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/LHospitalsRule.html`. Version: 09 2011