Riemenlängenberechnung

Jörg J. Buchholz

15. Juni 2017

Einleitung

Wie berechnet man eigentlich die Länge einer Fahrradkette, wenn die Durchmesser der beiden Ritzel und deren Abstand bekannt ist; oder die Länge eines Keilriemens im Auto, eines Riemenantriebs eines Plattenspielers, ...? Die dazu benötigte Formel ist etwas länglich und ihre im Folgenden durchgeführte Herleitung nicht ganz trivial.

Konstruktion

Zur Herleitung der Berechnungsformel der Riemenlänge ist die Konstruktion einer präzisen Skizze unerlässlich. Wenn man diese mit einem interaktiven Geometrieprogramm wie Geogebra [1] erstellt, werden die zur Herleitung benötigten Zusammenhänge besonders deutlich.

In Abbildung 1 sind die beiden Kreise (Achsen, Wellen, Ritzel, Riemenscheiben, ...) mit ihren beiden Radien

$$r_1 = \overline{AC} = \overline{AL} = \overline{AM} \tag{1}$$

auf den Geraden a, i und k und

$$r_2 = \overline{BD} = \overline{BF} = \overline{BJ} = \overline{BK} \tag{2}$$

auf den Geraden a, b und h dargestellt, um die ein „roter“ Riemen geschlungen ist. Der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise ist dabei

$$\Delta = \overline{AB} \tag{3}$$

und liegt auf der Geraden a. Da es sich um ein achsensymmetrisches Problem mit der Symmetrieachse a handelt, genügt es, die obere Hälfte des Riemens zu berechnen und

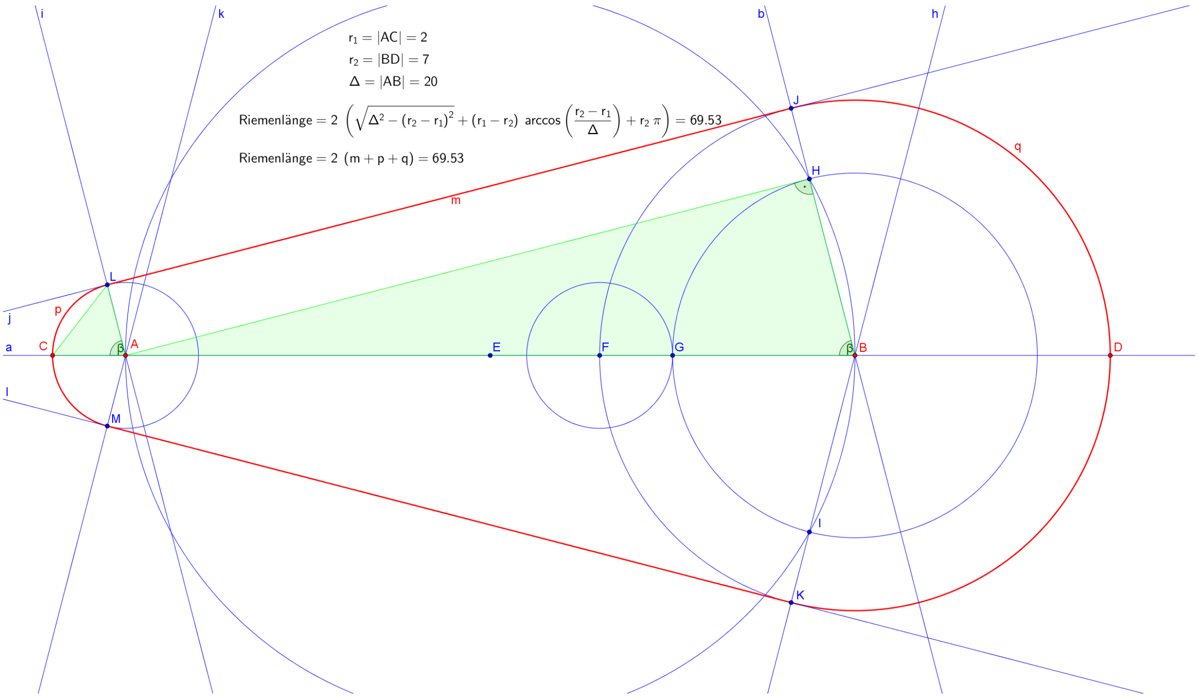

Abbildung 1: Tangente an zwei Kreise

das Ergebnis am Ende zu verdoppeln. Wenn es nun also gelingt, die Position der beiden Punkte L und J zu bestimmen, ist das Problem konstruktiv gelöst. L und J sind die Punkte, an denen die Tangente m die beiden Kreise berührt. Die halbe Riemenlänge berechnet sich dann aus der Länge der Strecke

$$m = \overline{LJ} \tag{4}$$

zuzüglich der beiden Kreisbögen

$$p = \overset{\frown}{CL} \tag{5}$$

und

$$q = \overset{\frown}{DJ} \tag{6}$$

Als erstes schlägt man nun einen Thaleskreis mit dem Radius $\frac{\Delta}{2}$ um den Mittelpunkt E der Strecke $\Delta = \overline{AB}$. Auf diesem Kreis liegen dann die beiden Kreismittelpunkte A und B und später der Eckpunkt H mit dem rechten Winkel. Als nächstes wird um F (also den Schnittpunkt des zweiten Kreises mit a) ein Kreis mit dem Radius r_1 abgetragen, der zum Punkt G als Schnittpunkt mit a führt. Damit lässt sich jetzt um B ein Kreis mit dem Radius $r_2 - r_1$ zeichnen, der durch den Punkt G verläuft und den Thaleskreis im Punkt H schneidet. Die Gerade b durch B und H schneidet den zweiten Kreis dann im gesuchten Punkt J. Der zweite gesuchte Punkt L findet sich durch eine Parallelverschiebung von b

in den Mittelpunkt A des ersten Kreises und den Schnitt der dann i genannten Geraden mit dem ersten Kreis.

Bedingt durch die Tatsache, dass die Tangente m senkrecht auf beiden Radiusgeraden b und i steht und die Tangentenparallele durch A und H die Radiusgerade b auf dem Thaleskreis im rechten Winkel schneidet, bilden die Punkte A, H, J und L ein Rechteck.

Berechnung

Zur Berechnung der in Gleichung (4), Gleichung (5) und Gleichung (6) definierten Teilstücke m, p und q betrachtet man das durch die Punkte A, B und H definierte und in Abbildung 1 farbig hinterlegte rechtwinklige Dreieck.

Die Bestimmung der gesuchten Kathete $m = \overline{AH}$ berechnet sich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die andere Kathete $\overline{BH}$ die Differenz $r_2 - r_1$ der beiden Radien und die Hypotenuse $\overline{AB}$ der Abstand Δ der Kreismittelpunkte voneinander ist, nach dem Satz des Pythagoras:

$$m = \sqrt{\Delta^2 - (r_2 - r_1)^2} \tag{7}$$

Der spitze Dreieckswinkel β im Punkt B, also der Schnittwinkel der Geraden a und b ergibt sich über die Definition der Kosinusfunktion:

$$\beta = \arccos\left(\frac{r_2 - r_1}{\Delta}\right) \tag{8}$$

Für die Berechnung des Bogens q wird im Punkt B der stumpfe Ergänzungswinkel β^* benötigt:

$$\beta^* = \pi - \beta \tag{9}$$

Mit diesem berechnet sich der Bogen dann einfach als

$$q = r_2\beta^* = r_2(\pi - \beta) \tag{10}$$

Bedingt durch die Parallelität der Geraden b und i findet sich der Winkel β auch im Dreieck $\triangle ACL$ im Punkt A wieder. Damit ergibt sich der Bogen p direkt als

$$p = r_1\beta \tag{11}$$

Die Gesamtriemenlänge G berechnet sich dann unter Berücksichtigung von Gleichung (7), Gleichung (8), Gleichung (11) und Gleichung (10) zu

$$
\begin{aligned}
G &= 2\,(m + p + q) && (12)\\
&= 2\left(\sqrt{\Delta^2 - (r_2 - r_1)^2} + r_1\beta + r_2(\pi - \beta)\right) && (13)\\
&= 2\left(\sqrt{\Delta^2 - (r_2 - r_1)^2} + (r_1 - r_2)\,\beta + r_2\pi\right) && (14)\\
&= 2\left(\sqrt{\Delta^2 - (r_2 - r_1)^2} + (r_1 - r_2)\arccos\left(\frac{r_2 - r_1}{\Delta}\right) + r_2\pi\right) && (15)
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] Buchholz, J. J. *Riemenlängenberechnung mit Geogebra*, `https://www.geogebra.org/m/R2nngBqB` (document)

[2] Buchholz, J. J. *Riemenlängenberechnung*, `http://prof.red/riemen/riemen.html`