



Regelungstechnik und Flugregler

Jörg J. Buchholz
<http://prof.red>

3. Juni 2024

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| I Grundlagen der Regelungstechnik | 13 |
| 1 Einführung | 14 |
| 1.1 Blockschaltbilder und Bezeichnungen | 14 |
| 1.1.1 Normen | 14 |
| 1.1.2 Signalverknüpfungen | 14 |
| 1.1.3 Blöcke | 14 |
| 1.1.4 Bezeichnungen | 15 |
| 1.2 Steuerung und Regelung | 16 |
| 1.2.1 Steuerung | 16 |
| 1.2.2 Regelung | 16 |
| 1.3 Spezielle Anregungsfunktionen und Systemantworten | 17 |
| 1.3.1 Sprung | 17 |
| 1.3.2 Rampe | 17 |
| 1.3.3 Rechteckimpuls | 17 |
| 1.3.4 Idealer Impuls (Dirac-Stoß) | 18 |
| 1.3.5 Sinus | 18 |
| 1.3.6 Beziehung zwischen Rampe, Sprung und Impuls | 18 |
| 1.3.7 Systemantworten | 18 |
| 1.4 Statisches und dynamisches Verhalten | 19 |
| 1.4.1 Statisches Verhalten (statische Kennlinie) | 19 |
| 1.4.2 Dynamisches Verhalten | 19 |
| 1.5 Lineares und nichtlineares Verhalten | 19 |
| 1.5.1 Lineare Blöcke | 20 |
| 2 Lineare Systeme | 21 |
| 2.1 Mechanischer Schwinger zweiter Ordnung | 21 |
| 2.1.1 Impulsantwort | 22 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.1.2 | Sprungantwort | 23 |
| 2.2 | Laplace-Transformation (eines P-T ₂) | 23 |
| 2.2.1 | Tabelle einiger Laplace-Transformationen | 24 |
| 2.2.2 | Beispiel: Sprungantwort eines P-T ₂ | 24 |
| 2.3 | Grenzwertsätze | 26 |
| 2.3.1 | Beispiel: Sprungantwort eines P-T ₂ | 26 |
| 2.4 | Pole der Übertragungsfunktion | 27 |
| 2.5 | Frequenzgang | 28 |
| 2.6 | Bodediagramm und Nyquistortskurve | 29 |
| 2.6.1 | Eigenschaften komplexer Zahlen | 29 |
| 2.6.2 | Logarithmische Skalierung (Dezibel) | 31 |
| 2.6.3 | Beispiel: System zweiter Ordnung (P-T ₂) | 31 |
| 2.7 | P-Glied | 33 |
| 2.8 | P-T ₁ | 34 |
| 2.9 | P-T ₂ | 37 |
| 2.10 | I-Glied | 40 |
| 2.11 | D-Glied | 42 |
| 2.12 | PID-Glied | 44 |
| 2.13 | Totzeit | 47 |
| 2.14 | Zustandsraumdarstellung | 49 |
| 2.14.1 | Blockschaltbild der Zustandsraumdarstellung | 50 |
| 3 | Reglerauslegung | 51 |
| 3.1 | Stabilität | 51 |
| 3.1.1 | BIBO-Stabilität (Bounded Input Bounded Output) | 51 |
| 3.1.2 | Asymptotische Stabilität | 51 |
| 3.1.3 | Grundlegendes Stabilitätskriterium | 52 |
| 3.2 | Regelkreis | 53 |
| 3.2.1 | Beispiel | 54 |
| 3.3 | Nyquistkriterium | 55 |
| 3.3.1 | Beispiel | 56 |
| 3.3.2 | Zwei Wege zur Stabilitätsuntersuchung des Regelkreises | 58 |
| 3.4 | Reglerentwurf | 58 |
| 3.4.1 | Beispiel: P-T ₃ | 59 |
| 3.5 | Gütekriterien | 61 |

| | | |
|--------|--|----|
| 3.5.1 | Integralkriterien | 62 |
| 3.6 | Regleroptimierung mit Simulation | 63 |
| 3.7 | Einstellregeln für Regelkreise | 63 |
| 3.7.1 | Nach Ziegler und Nichols (Stabilitätsrand) | 64 |
| 3.7.2 | Nach Chien, Hrones und Reswick (Sprungantwort) | 64 |
| 3.8 | Störgrößenaufschaltung | 66 |
| 3.9 | Vorsteuerung | 67 |
| 3.9.1 | Kombination mit Regelung | 68 |
| 3.10 | Digitale (zeitdiskrete) Regelung | 68 |
| 3.10.1 | z -Transformation | 69 |
| 3.10.2 | Näherungen | 69 |
| 3.10.3 | Beispiel: Digitaler Tiefpass | 69 |

II Flugregelung 71

| | | |
|---------------------|--|----|
| 4 Einführung | 72 | |
| 4.1 | Bezeichnungen der Luftfahrt | 72 |
| 4.1.1 | Bewegungsgrößen | 72 |
| 4.1.2 | Indizes | 73 |
| 4.1.3 | Geschwindigkeiten | 74 |
| 4.1.4 | Stellgrößen | 75 |
| 4.2 | Koordinatentransformation | 76 |
| 4.2.1 | Koordinatensysteme | 78 |
| 4.2.2 | Drehung vom erdfesten ins flugzeugfeste Koordinatensystem | 79 |
| 4.2.3 | Drehung vom erdfesten ins bahnfeste Koordinatensystem | 80 |
| 4.2.4 | Drehung vom aerodynamischen ins flugzeugfeste Koordinatensystem | 81 |
| 4.2.5 | Transformationsmatrizen | 81 |
| 4.2.6 | Umrechnung zwischen kartesischen und sphärischen Koordinaten | 84 |
| 4.2.7 | Darstellung der Winkel und Vektoren | 87 |
| 5 Subsysteme | 89 | |
| 5.1 | Aerodynamik | 89 |
| 5.1.1 | Beiwerte | 90 |
| 5.1.2 | Lineare Derivativ-Aerodynamik | 91 |
| 5.2 | Triebwerk | 93 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.3 | Stellerdynamik | 94 |
| 5.3.1 | Tierversuch | 94 |
| 5.3.2 | Verallgemeinerung | 95 |
| 5.4 | Wind | 96 |
| 5.4.1 | Turbulenzen | 96 |
| 5.4.2 | Windgradienten, Scherwind | 96 |
| 5.4.3 | Flug im stationären Windfeld | 100 |
| 5.5 | Kinetik | 102 |
| 5.5.1 | Differenzialgleichung der Position | 103 |
| 5.5.2 | Differenzialgleichung des Drehwinkels | 104 |
| 5.5.3 | Differenzialgleichung der Bahngeschwindigkeit | 105 |
| 5.5.4 | Differenzialgleichung der Bahndrehgeschwindigkeit | 108 |
| 5.6 | Quaternionen | 112 |
| 5.6.1 | Eigenschaften der Quaternionen | 112 |
| 5.6.2 | Berechnung der Quaternion aus dem Drehwinkel und der Drehachse | 114 |
| 5.6.3 | Berechnung des Drehwinkels und der Drehachse aus der Quaternion | 115 |
| 5.6.4 | Berechnung der Eulerwinkel aus der Transformationsmatrix | 115 |
| 5.6.5 | Berechnung der Transformationsmatrix aus der Quaternion | 116 |
| 5.6.6 | Berechnung der Eulerwinkel aus der Quaternion | 117 |
| 5.6.7 | Berechnung der Quaternion aus den Eulerwinkeln | 118 |
| 5.6.8 | Berechnung der Quaternion aus der Transformationsmatrix | 119 |
| 5.6.9 | Differenzialgleichung der Quaternionen | 121 |
| 5.6.10 | Numerische Simulation | 122 |
| 6 | Reglerauslegung | 123 |
| 6.1 | Eigenbewegung | 123 |
| 6.1.1 | Aufteilung der Zustandsgrößen in Längs- und Seitenbewegung . . . | 123 |
| 6.1.2 | Längsbewegung | 123 |
| 6.1.3 | Seitenbewegung | 125 |
| 6.2 | Trimmrechnung | 127 |
| 6.2.1 | Horizontaler Geradeausflug | 127 |
| 6.2.2 | Verallgemeinerung | 128 |
| 6.2.3 | Triebwerksdynamik | 129 |
| 6.3 | Basisregler | 130 |
| 6.3.1 | Basisregler der Längsbewegung | 130 |

| | | |
|-------|--------------------------------|-----|
| 6.3.2 | Basisregler der Seitenbewegung | 131 |
| 6.4 | Bahnregler | 132 |
| 6.4.1 | Kaskadenregelung | 132 |
| 6.4.2 | Höhen- und Bahnazimutregelung | 133 |

Nomenklatur

| | |
|--------------------|---|
| α | Anstellwinkel |
| α | Subjektiver Wichtungsfaktor |
| \bar{q} | Staudruck |
| β | Schiebewinkel |
| χ | Bahnazimut |
| ΔZ | Quaternionenfehler |
| $\delta(t)$ | Idealer Impuls (Dirac-Stoß) |
| δ_η | Steuerknüppelausschlag (Ziehen) |
| δ_ξ | Steuerknüppelausschlag (nach rechts) |
| δ_ζ | Pedalwinkel |
| η | Höhenruderausschlag |
| γ | Bahnwinkel, Bahnneigungswinkel, Steigwinkel |
| $\Im(z)$ | Imaginärteil einer komplexen Zahl |
| \mathcal{L} | Laplace-Operator |
| \mathcal{L}^{-1} | Inverser Laplace-Operator |
| ∇ | Nabla-Operator |
| ω | Kreisfrequenz |
| ω_0 | Eigenkreisfrequenz |
| ω_E | Eckfrequenz |
| ω_m | Mittenfrequenz |
| \bar{Z} | Konjugierte Quaternion |
| $\Re(z)$ | Realteil einer komplexen Zahl |
| ρ | Dichte (der Luft) |

| | |
|---------------|---|
| σ | Realteil der komplexen Frequenz |
| τ | Zeit (als Integrationsvariable) |
| ε | Infinitesimal kleine Größe |
| ε | Winkel eines Poles zur imaginären Achse |
| Φ | Hängewinkel, Querneigungswinkel, Rollwinkel |
| φ | Phasenwinkel, Phasenverschiebung, Phase (einer komplexen Zahl) |
| Ψ | Gierwinkel, Azimut |
| Θ | Nickwinkel, Längsneigungswinkel |
| Ω | Drehgeschwindigkeitsvektor |
| Φ | Lagewinkelvektor (Eulerwinkelvektor) |
| A | Systemmatrix, Dynamikmatrix |
| B | Eingangsmatrix, Steuermatrix |
| C | Ausgangsmatrix, Messmatrix |
| D | Drehimpulsvektor |
| D | Durchgriffsmatrix |
| f | Vektordifferenzialgleichung |
| G | Gewichts(kraft)vektor |
| g | Vektorausgangsgleichung |
| I | Trägheitstensor |
| M_{fa} | Transformationsmatrix vom aerodynamischen ins flugzeugfeste Koordinatensystem |
| M_{fg} | Transformationsmatrix vom geodätischen ins flugzeugfeste Koordinatensystem |
| M_{kg} | Transformationsmatrix vom geodätischen ins bahnfeste Koordinatensystem |
| M_Ω | Quaternionendifferenzialgleichungsmatrix |
| n | Quaternionendrehachsenvektor |
| P | Impulsvektor |
| Q | Momentenvektor |
| r_F | Schubvektorangriffspunkt |
| R | (Resultierender) Kraftvektor |

| | |
|---------------|--|
| s | Positionsvektor (Richtung, Strecke) |
| u | Eingangs(größen)vektor |
| V | Geschwindigkeitsvektor |
| v | Ausgangs(größen)vektor |
| x | Zustands(größen)vektor |
| Ξ | Quaternionendrehwinkel |
| ξ | Querruderausschlag |
| ζ | Seitenruderausschlag |
| A | Amplitude, Amplitudenverhältnis |
| A | Auftrieb |
| A | Fläche |
| a | Realteil einer Quaternion (bzw. einer komplexen Zahl) |
| b, c, d | Imaginärteile einer Quaternion (bzw. einer komplexen Zahl) |
| c | Federkonstante |
| C_A | Auftriebsbeiwert |
| C_l | Rollmomentenbeiwert |
| C_m | Nickmomentenbeiwert |
| C_n | Giermomentenbeiwert |
| C_Q | Querkraftbeiwert |
| C_W | Widerstandsbeiwert |
| $C_{A\alpha}$ | Derivativ (Auftrieb aufgrund des Anstellwinkels) usw. |
| C_{W0} | Nullwiderstand |
| D | Dämpfung |
| $d(t)$ | Rechteckimpuls |
| dB | Dezibel |
| E | Aerodynamische Krafteinheit |
| $e(t)$ | Regeldifferenz (Regelfehler, Regelabweichung) |
| e_{max} | Maximale Überschwingweite |
| F | Kraft |

| | |
|-----------------|--|
| f | Frequenz |
| $f(t)$ | Rampenantwort im Zeitbereich |
| F_c | Sollschub |
| g | Erdbeschleunigung |
| $G(s)$ | Übertragungsfunktion |
| $g(t)$ | Impulsantwort (Gewichtsfunktion) im Zeitbereich |
| $G(z)$ | z-Übertragungsfunktion |
| G_0 | Übertragungsfunktion des offenen Kreises |
| G_g | Gesamtübertragungsfunktion, Führungsübertragungsfunktion |
| G_M | Mess(glied)übertragungsfunktion |
| G_R | Reglerübertragungsfunktion |
| G_S | Streckenübertragungsfunktion |
| G_V | Vorsteuerungsübertragungsfunktion |
| G_V | Vorwärtsübertragungsfunktion |
| G_z | Störübertragungsfunktion |
| G_{ew} | Regelabweichung bei Führung |
| G_{ez} | Regelabweichung bei Störung |
| G_{st} | Störgrößenaufschaltungsübertragungsfunktion |
| $H(s)$ | Sprungantwort (Übergangsfunktion) im Laplace-Bereich |
| $h(t)$ | Sprungantwort (Übergangsfunktion) im Zeitbereich |
| I | Integralkriterium |
| i, j, k | Imaginäre Einheiten (einer Quaternion) |
| I_x, I_y, I_z | Trägheitsmoment um die jeweilige Achse |
| I_{xz} | Deviationsmoment |
| K | Verstärkungsfaktor |
| k | Ganze Zahl |
| K_β | Schiebewinkelregler |
| K_χ | Bahnazimutregler, Kursregler |
| K_ϕ | Querlageregler |

| | |
|----------------|---|
| K_Θ | Nicklageregler |
| K_H | Hilfsgröße |
| K_H | Höhenregler |
| K_R | Reglerverstärkung |
| K_V | Fahrtregler, Autothrottle |
| $K_{\eta q}$ | Nickdämpfer |
| $K_{\xi p}$ | Rolldämpfer |
| $K_{\zeta r}$ | Gierdämpfer |
| $K_{R_{krit}}$ | Kritische Verstärkung, Amplitudenreserve |
| L | Rollmoment |
| l_μ | Bezugsflügeltiefe |
| M | Nickmoment |
| m | Masse |
| Ma | Machzahl |
| N | Giermoment |
| p | Rollgeschwindigkeit |
| p_A^* | Nomierte Rollgeschwindigkeit usw. |
| Q | Querkraft |
| q | Nickgeschwindigkeit |
| r | Betrag einer komplexen Zahl |
| r | Dämpfungsfaktor |
| r | Giergeschwindigkeit |
| $r(t)$ | Einheitsrampe |
| s | Laplace-Variable, Bildvariable, komplexe Frequenz |
| $S(s)$ | Einheitssprung im Laplace-Bereich |
| $s(t)$ | Einheitssprung im Zeitbereich |
| T | Abtastzeit |
| T | Periodendauer |
| t | Zeit |

| | |
|-----------------|--|
| t_ε | Betrag der Regelabweichung nie mehr größer als ε |
| T_D | Differenziererzeitkonstante |
| T_F | Triebwerkszeitkonstante |
| T_g | Ausgleichszeit |
| T_I | Integratorzeitkonstante |
| T_N | Bezugszeitkonstante |
| T_N | Nachstellzeit |
| T_T | Totzeitkonstante |
| T_u | Verzugszeit |
| T_V | Vorhaltzeit |
| t_{an} | Anregelzeit |
| T_{krit} | Periodendauer der kritischen Schwingung |
| u | Vorwärtsgeschwindigkeit |
| $U(s)$ | Eingangsgröße im Laplace-Bereich |
| $u(t)$ | Eingangsgröße im Zeitbereich |
| u_k | Eingangsgröße im z-Bereich |
| v | Seitwärtsgeschwindigkeit |
| $V(s)$ | Ausgangsgröße im Laplace-Bereich |
| $v(t)$ | Ausgangsgröße im Zeitbereich |
| V_A | Fluggeschwindigkeit, Anströmgeschwindigkeit, aerodynamische Geschwindigkeit, Fahrt |
| v_k | Ausgangsgröße im z-Bereich |
| W | Widerstand |
| w | Sinkgeschwindigkeit |
| $w(t)$ | Führungsgröße (Sollwert) |
| X | x-Komponente des Kraftvektors (nach vorne) |
| x | Zustandsgröße, Zustandsvariable |
| x | x-Komponente des Positionsvektors (nach vorne) |
| $x(t)$ | Regelgröße (Istwert) |

| | |
|------------|--|
| Y | y-Komponente des Kraftvektors (nach rechts) |
| y | y-Komponente des Positionsvektors (nach rechts) |
| $y(t)$ | Stellgröße |
| Z | Quaternion |
| Z | z-Komponente des Kraftvektors (nach unten) |
| z | Komplexe Zahl |
| z | Unabhängige Variable der z-Übertragungsfunktion |
| z | z-Komponente des Positionsvektors (nach unten) |
| $z(t)$ | Störgröße |
| Z^0 | Einheitsquaternion |
| Z_D | Einheitsdrehquaternion |
| Z_Ω | Bahndrehgeschwindigkeitsquaternion |
| Index A | Aerodynamisch |
| Index a | Flugwindfestes (aerodynamisches) Koordinatensystem |
| Index F | Schub |
| Index f | Flugzeugfestes (körperfestes) Koordinatensystem |
| Index g | Erd(lot)festes (geodätisches) Koordinatensystem |
| Index K | Bahn |
| Index k | (Flug)bahnfestes Koordinatensystem |
| Index W | Wind |
| PBZ | Partialbruchzerlegung |

Teil I

Grundlagen der Regelungstechnik

Kapitel 1

Einführung

1.1 Blockschaltbilder und Bezeichnungen

1.1.1 Normen

DIN 19221 Regelungstechnik und Steuerungstechnik

DIN 19225 Benennung und Einteilung von Reglern

DIN 19226 Regelungstechnik und Steuerungstechnik

VDI/VDE 3526 Benennungen für Steuer- und Regelschaltungen

1.1.2 Signalverknüpfungen

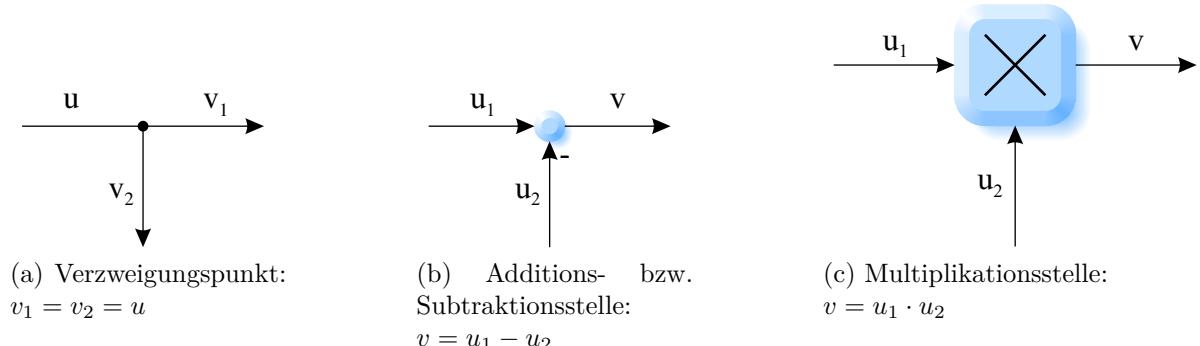


Abbildung 1.1: Signalverknüpfungen

1.1.3 Blöcke

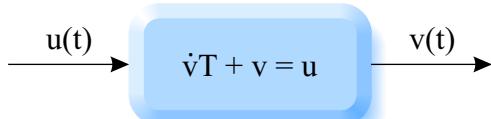


Abbildung 1.2: Differenzialgleichung

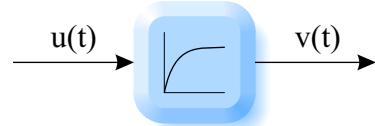


Abbildung 1.3: Sprungantwort (Übergangsfunktion)

$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{G(s) = \frac{1}{Ts + 1}} \xrightarrow{V(s)}$$

Abbildung 1.4: Übertragungsfunktion

1.1.4 Bezeichnungen

| | | |
|--------|---|---|
| u | Eingangsgröße | <i>Input variable</i> |
| v | Ausgangsgröße | <i>Output variable</i> |
| w | Führungsgröße (Sollwert) | <i>Reference input variable, command, set value</i> |
| x | Regelgröße (Istwert) | <i>Control(ed) variable</i> |
| e | Regeldifferenz (Regelfehler, Regelabweichung) | <i>Error signal, control error, control difference, deviation</i> |
| y | Stellgröße | <i>Correcting variable, manipulating variable</i> |
| z | Störgröße | <i>Disturbance</i> |
| s | Laplace-Variable, Bildvariable, komplexe Frequenz | <i>Complex frequency</i> |
| $G(s)$ | Übertragungsfunktion | <i>Transfer function</i> |

Tabelle 1.1: Deutsche und englische Bezeichnungen der Regelungstechnik

1.2 Steuerung und Regelung

1.2.1 Steuerung

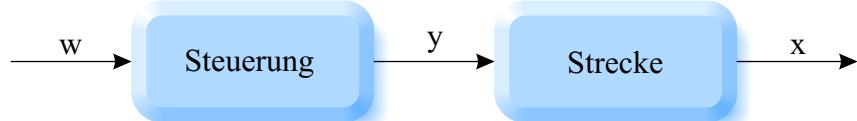


Abbildung 1.5: Steuerung

- Offene Wirkungskette, keine Rückführung
- Kann nur bekannte Störungen kompensieren
- Kann nicht instabil werden
- Schnell

1.2.2 Regelung

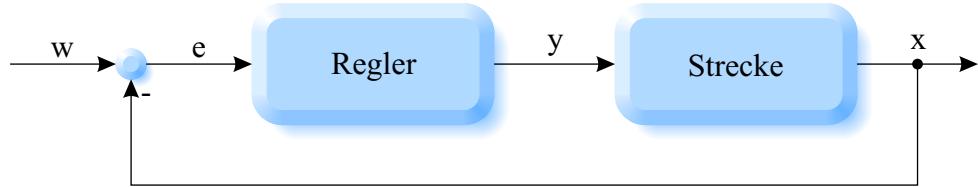


Abbildung 1.6: Regelung

- Geschlossener Regelkreis
- Kann auch unbekannte Störungen ausregeln
- Kann instabil werden
- Langsamer

1.3 Spezielle Anregungsfunktionen und Systemantworten

1.3.1 Sprung

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0.5 & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

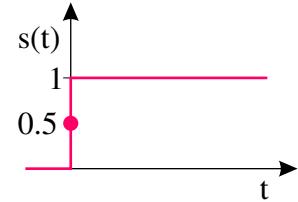


Abbildung 1.7: Einheitssprung

1.3.2 Rampe

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

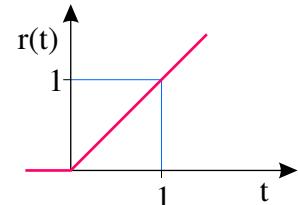


Abbildung 1.8: Einheitsrampe

1.3.3 Rechteckimpuls

$$d(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

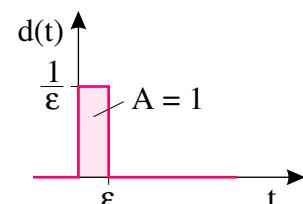


Abbildung 1.9: Rechteckimpuls

1.3.4 Idealer Impuls (Dirac-Stoß)

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

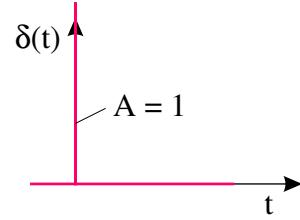


Abbildung 1.10: Idealer Impuls (Dirac-Stoß)

1.3.5 Sinus

$$x(t) = \sin \omega t$$

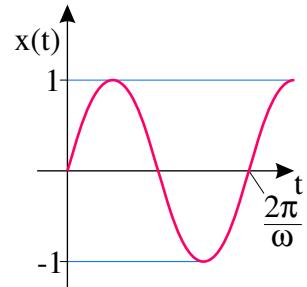


Abbildung 1.11: Einheitssinus

1.3.6 Beziehung zwischen Rampe, Sprung und Impuls

$$r(t) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} s(t) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \delta(t)$$

$$r(t) \xleftarrow{\int dt} s(t) \xleftarrow{\int dt} \delta(t)$$

1.3.7 Systemantworten

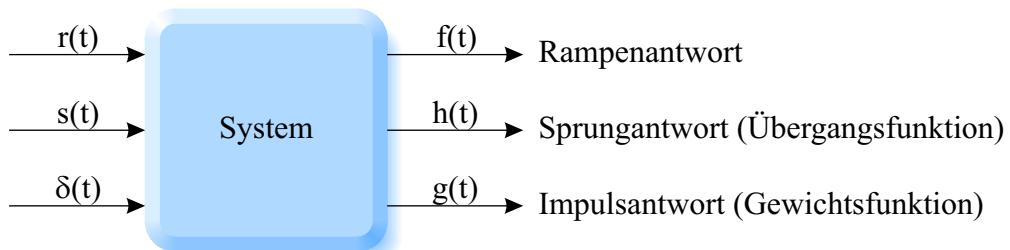


Abbildung 1.12: Systemantworten

1.4 Statisches und dynamisches Verhalten

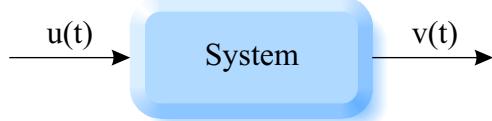


Abbildung 1.13: Allgemeines (statisches oder dynamisches) System

1.4.1 Statisches Verhalten (statische Kennlinie)

- Beispiel: idealer Messverstärker
- Veränderung der Ausgangsgröße nur, wenn sich die Eingangsgröße gerade ändert
- Keine Energiespeicher → keine Eigenbewegung (Eigendynamik)
- Beschreibung durch algebraische Gleichungen

1.4.2 Dynamisches Verhalten

- Beispiel: Pendel
- Veränderung der Ausgangsgröße, ohne dass sich die Eingangsgröße gerade ändert
- Interne Energiespeicher werden ge- und entladen → Eigenbewegung (Eigendynamik)
- Beschreibung durch Differenzialgleichungen

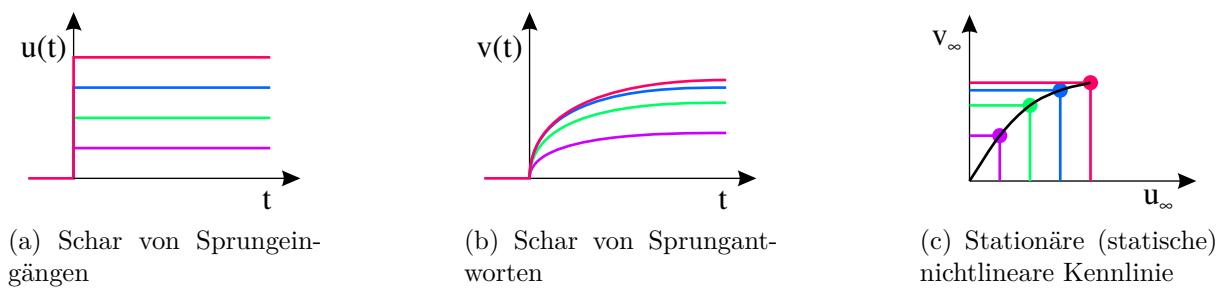


Abbildung 1.14: Dynamisches Verhalten

1.5 Lineares und nichtlineares Verhalten

Lineare Systeme sind in vieler Hinsicht angenehmer als nichtlineare Systeme. Sie lassen sich im allgemeinen wesentlich einfacher analysieren, regeln und simulieren. Zur Überprüfung, ob ein allgemeines nichtlineares System der Form $v = g(u)$ linear ist, werden zwei Linearitätsbedingungen herangezogen, die beide erfüllt sein müssen:

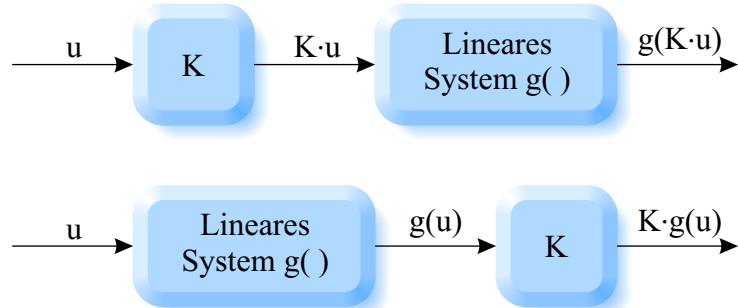


Abbildung 1.15: Verstärkungsprinzip: $g(K \cdot u) \stackrel{!}{=} K \cdot g(u)$

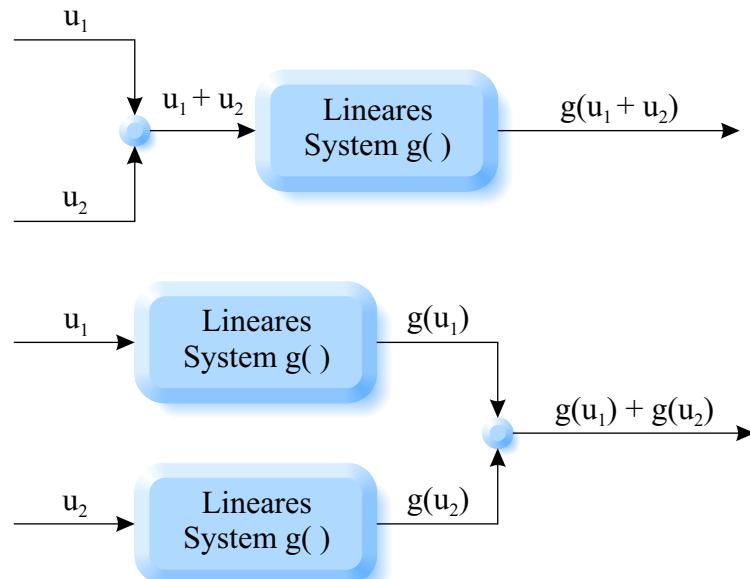


Abbildung 1.16: Überlagerungsprinzip: $g(u_1 + u_2) \stackrel{!}{=} g(u_1) + g(u_2)$

✗ „Wenn's für eine Eingangsamplitude klappt, klappt's immer.“

✗ Reihenfolge linearer Blöcke vertauschbar: $g(h(u)) = h(g(u))$

1.5.1 Lineare Blöcke

- Integrator
- Differenzierer
- Verstärker (Konstante)
- Summe
- Totzeit
- Zusammengesetzte Blöcke: P-T₁, P-T₂, PD-T₁-Filter, PID-Regler, ...
- Allgemeine Übertragungsfunktion
- Lineare Zustandsraumdarstellung

Kapitel 2

Lineare Systeme

2.1 Mechanischer Schwinger zweiter Ordnung

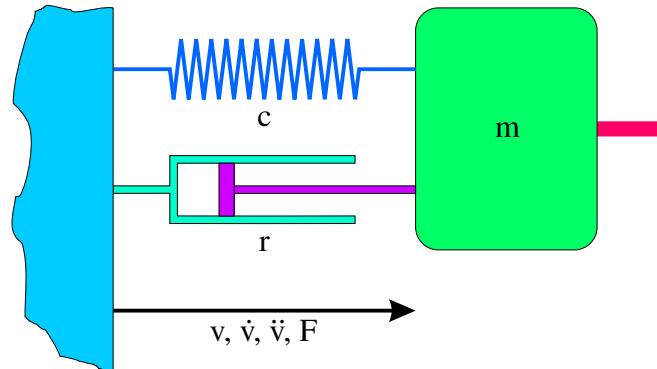


Abbildung 2.1: Mechanischer Schwinger zweiter Ordnung (v : Weg)

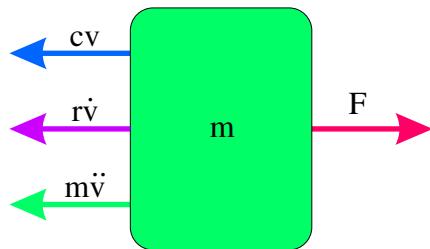


Abbildung 2.2: Freigeschnittener Schwinger zweiter Ordnung

Lineare inhomogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$m\ddot{v} + r\dot{v} + cv = F$$

Normalform:

$$\ddot{v} + \frac{r}{m}\dot{v} + \frac{c}{m}v = \frac{F}{m}$$

Allgemeines System zweiter Ordnung:

$$\ddot{v} + 2D\omega_0\dot{v} + \omega_0^2 v = K\omega_0^2 u$$

Eingangsgröße:

$$u = F$$

Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Dämpfung:

$$2D\omega_0 = \frac{r}{m} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{r}{2m\omega_0} = \frac{r}{2m\sqrt{\frac{c}{m}}} = \frac{r}{2\sqrt{cm}}$$

Verstärkungsfaktor:

$$K\omega_0^2 = \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{m\omega_0^2} = \frac{1}{m\frac{c}{m}} = \frac{1}{c}$$

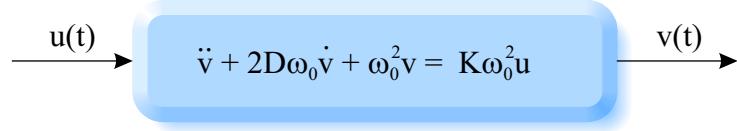


Abbildung 2.3: Blockschaltbild Schwinger zweiter Ordnung

2.1.1 Impulsantwort

Impuls als Eingangsgröße: $u(t) = \delta(t)$



Abbildung 2.4: Impulsantwort $g(t)$

2.1.2 Sprungantwort

Sprung als Eingangsgröße: $u(t) = s(t)$



Abbildung 2.5: Sprungantwort $h(t)$

2.2 Laplace-Transformation (eines P-T₂)

Differenzialgleichung:

$$\ddot{v} + 2D\omega_0\dot{v} + \omega_0^2 v = K\omega_0^2 u$$

Anfangswerte gleich null:

$$v(0) = \dot{v}(0) = 0$$

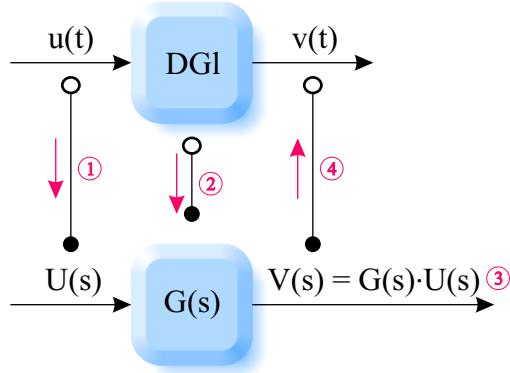


Abbildung 2.6: Lösung einer Differenzialgleichung mittels Laplace-Transformation

Laplace-Transformation:

- der Eingangsfunktion: $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$
- der Ausgangsfunktion: $\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$
- der ersten Ableitung der Ausgangsfunktion: $\mathcal{L}\{\dot{v}(t)\} = s \cdot V(s)$
- der zweiten Ableitung der Ausgangsfunktion: $\mathcal{L}\{\ddot{v}(t)\} = s^2 \cdot V(s)$

Transformierte Differenzialgleichung:

$$s^2V(s) + 2D\omega_0 s V(s) + \omega_0^2 V(s) = K\omega_0^2 U(s)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

2.2.1 Tabelle einiger Laplace-Transformationen

| $x(t)$ | $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ |
|-------------------------|-------------------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 |
| $s(t) = 1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $r(t) = t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| e^{-at} | $\frac{1}{s+a}$ |
| $e^{-at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |
| $e^{-at} \cos \omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |

Tabelle 2.1: Die wichtigsten Laplace-Transformationen

2.2.2 Beispiel: Sprungantwort eines P-T₂

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (\omega_0 = 1, K = 1, D = 0.5)$$

Sprung:

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = S(s) = \frac{1}{s}$$

Sprungantwort:

$$H(s) = G(s) \cdot S(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Partialbruchzerlegung:

$$H(s) = \frac{As + B}{s^2 + s + 1} + \frac{C}{s}$$

Gleiche Nenner:

$$\frac{1}{(s^2 + s + 1)s} = \frac{(As + B)s + C(s^2 + s + 1)}{(s^2 + s + 1)s}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler:

$$\begin{aligned}s^0 : \quad 1 &= C \quad \Rightarrow \quad C = 1 \\ s^1 : \quad 0 &= B + C = B + 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1 \\ s^2 : \quad 0 &= A + C = A + 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1\end{aligned}$$

Resultat der Partialbruchzerlegung:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Quadratische Ergänzung:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Vergleich mit Laplace-Transformationstabelle (Tabelle 2.1):

$$a = \frac{1}{2} \quad \omega = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zähler durch Aufspaltung an Tabelle anpassen:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Dritten Summanden auch an Tabelle anpassen:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{4}{3}}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Bereit zur Rücktransformation:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Sprungantwort im Zeitbereich:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \cos \sqrt{\frac{3}{4}}t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \sqrt{\frac{3}{4}}t \quad (2.1)$$

Periodendauer:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \approx 7.2$$

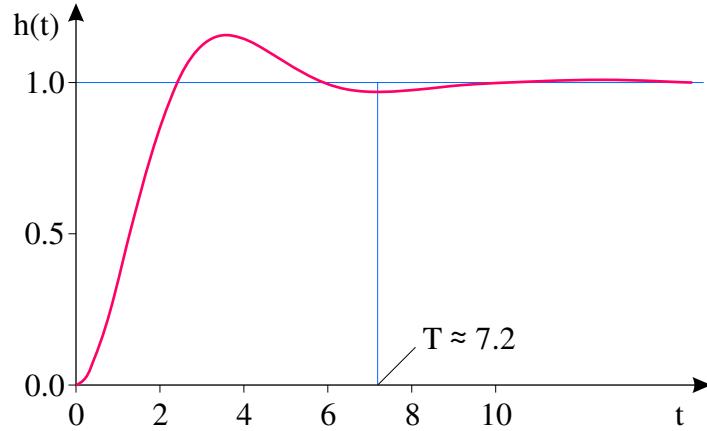


Abbildung 2.7: Sprungantwort eines Systems zweiter Ordnung ($D = 0.5$)

2.3 Grenzwertsätze

Anfangswertsatz:

$$f(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

Endwertsatz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

2.3.1 Beispiel: Sprungantwort eines P-T₂

Allgemein (Endwertsatz):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Speziell (P-T₂):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2} = K$$

2.4 Pole der Übertragungsfunktion

Beispiel: System zweiter Ordnung (P-T₂)

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Pole sind Nullstellen des Nenners:

$$s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

Zwei (reelle oder konjugiert komplexe) Pole:

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{D^2\omega_0^2 - \omega_0^2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$

Fallunterscheidung:

| | | |
|-----------|--|---|
| $ D > 1$ | $s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$ | Zwei reelle Pole |
| $ D < 1$ | $s_{1,2} = \underbrace{-D\omega_0}_{\sigma} \pm j\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - D^2}}_{\omega}$ | Konjugiert komplexes Polpaar |
| $D = 0$ | $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ | Konjugiert komplexes Polpaar auf der imaginären Achse |
| $D = 1$ | $s_{1,2} = -\omega_0$ | Reeller Doppelpol in der linken Halbebene |
| $D = -1$ | $s_{1,2} = \omega_0$ | Reeller Doppelpol in der rechten Halbebene (instabil) |

Tabelle 2.2: Lage der Pole in Abhängigkeit von der Dämpfung

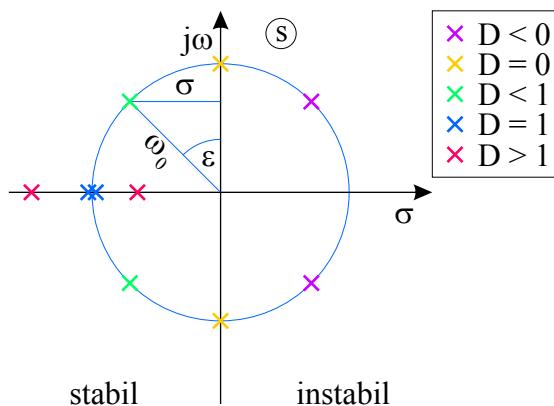


Abbildung 2.8: Polverteilung eines Systems zweiter Ordnung

Stabilität: „Ein System mit mindestens einem Pol in der rechten Halbebene ist instabil.“

Eigenfrequenz ist Abstand vom Ursprung:

$$|\sigma|^2 + \omega^2 = |-D\omega_0|^2 + (\omega_0\sqrt{1-D^2})^2 = D^2\omega_0^2 + \omega_0^2(1-D^2) = \omega_0^2$$

„Je näher am Ursprung, desto langsamer.“

Zusammenhang zwischen Winkel ε und Dämpfung D (im zweiten Quadranten):

$$\sin \varepsilon = \frac{|\sigma|}{\omega_0} = \frac{D\omega_0}{\omega_0} = D$$

„Je näher an der imaginären Achse, desto schlechter gedämpft“

2.5 Frequenzgang

Sinusanregung:

$$u(t) = A_u \sin \omega t$$

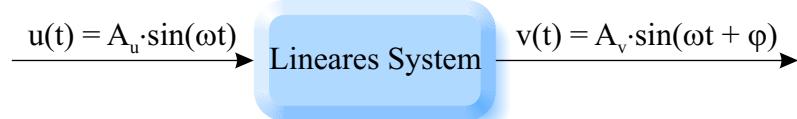


Abbildung 2.9: Sinusanregung und -antwort eines linearen Systems

Stationäre Sinusantwort (Einschwingvorgang abgeschlossen) hat:

- Gleiche Frequenz ω
- Andere Amplitude A_v
- Andere Phase (Phasenverschiebung φ)

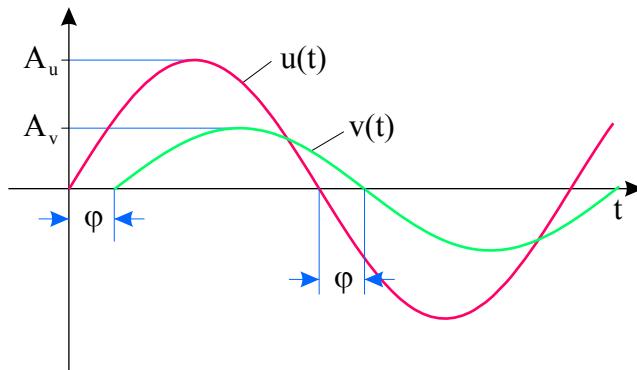


Abbildung 2.10: Sinusanregung und -antwort eines linearen Systems

Der Frequenzgang setzt sich aus dem Amplitudengang (Verhältnis von Aus- zu Eingangsamplitude über der Frequenz) und dem Phasengang (Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz) zusammen:

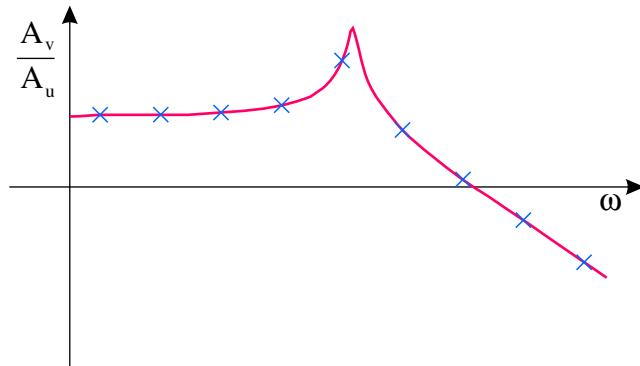


Abbildung 2.11: Amplitudengang

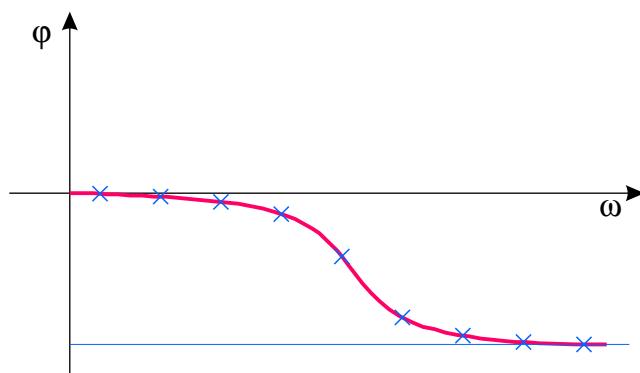


Abbildung 2.12: Phasengang

2.6 Bodediagramm und Nyquistortskurve

2.6.1 Eigenschaften komplexer Zahlen

Komplexe Zahl in arithmetischer Darstellungsform:

$$z = a + jb$$

Komplexe Zahl in exponentieller Darstellungsform:

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

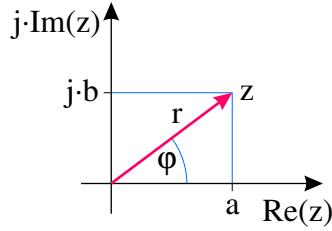


Abbildung 2.13: Punktdarstellung der komplexen Zahl z

Betrag:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Phase:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Realteil:

$$\Re(z) = a = r \cdot \cos(\varphi)$$

Imaginärteil:

$$\Im(z) = b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Quotient zweier komplexer Zahlen:

$$z_Q = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

Betrag ist gleich dem Quotienten der Einzelbeträge:

$$|z_Q| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Phase ist gleich der Differenz der Einzelphasen:

$$\varphi_Q = \varphi_1 - \varphi_2 = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$

Real- und Imaginärteil ergeben sich nach konjugiert komplexem Erweitern:

$$z_Q = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac - ajd + jbc - jbd}{cc - cjd + jdc - jdjd} = \frac{ac + bd + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Realteil:

$$\Re(z_Q) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$

Imaginärteil:

$$\Im(z_Q) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

2.6.2 Logarithmische Skalierung (Dezibel)

Amplitudengang Doppelt-logarithmische Skalierung: logarithmische Frequenz und Amplitude in Dezibel

Phasengang Einfach-logarithmische Skalierung: nur logarithmische Frequenz

Umrechnung Dezibel:

- $A [dB] = 20 \cdot \log_{10} A$
- $A = 10^{\frac{A[dB]}{20}}$

| | | | | | | | |
|---------|---|----|------|-------|-------------|--------------------|-----------|
| $A[dB]$ | 0 | 20 | -40 | 80 | 6 | 3 | $-\infty$ |
| A | 1 | 10 | 0.01 | 10000 | ≈ 2 | $\approx \sqrt{2}$ | 0 |

Tabelle 2.3: Einige Umrechnungsbeispiele

2.6.3 Beispiel: System zweiter Ordnung ($P-T_2$)

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{0.1}{s^2 + s + 1}$$

Frequenzgang:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{0.1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} \\
 &= \frac{0.1}{(1 - \omega^2) + j\omega} \\
 &= \frac{0.1}{(1 - \omega^2) + j\omega} \cdot \frac{(1 - \omega^2) - j\omega}{(1 - \omega^2) - j\omega} \\
 &= \frac{0.1 \cdot (1 - \omega^2 - j\omega)}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.3)

Aus Gleichung (2.2) folgen der Amplitudengang und der Phasengang:

Amplitudengang:

$$A(j\omega) = |G(j\omega)| = \frac{0.1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{1 - \omega^2}\right)$$

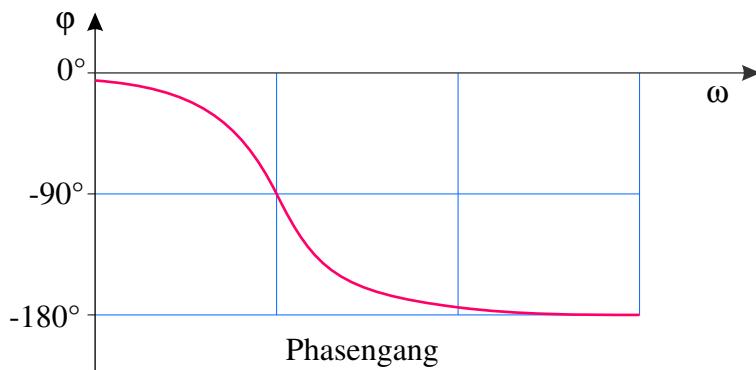
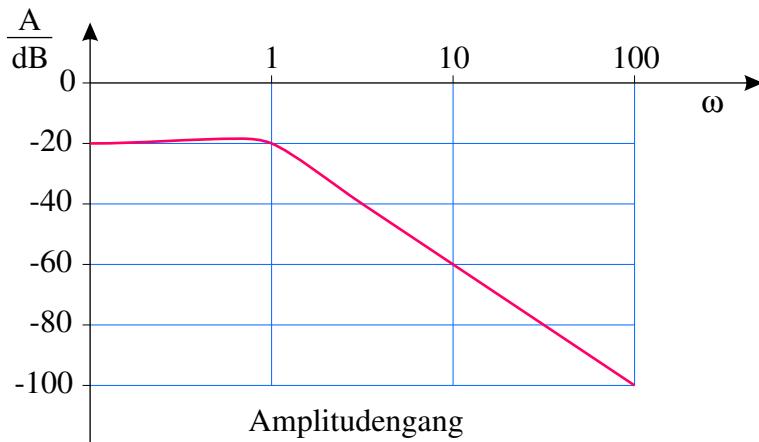


Abbildung 2.14: Bodediagramm: Amplitudengang in Dezibel und Phasengang über logarithmischer Frequenz

Aus Gleichung (2.3) folgen der Realteil und der Imaginärteil:

Realteil:

$$\Re(G(j\omega)) = \frac{0.1(1 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

Imaginärteil:

$$\Im(G(j\omega)) = \frac{-0.1\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

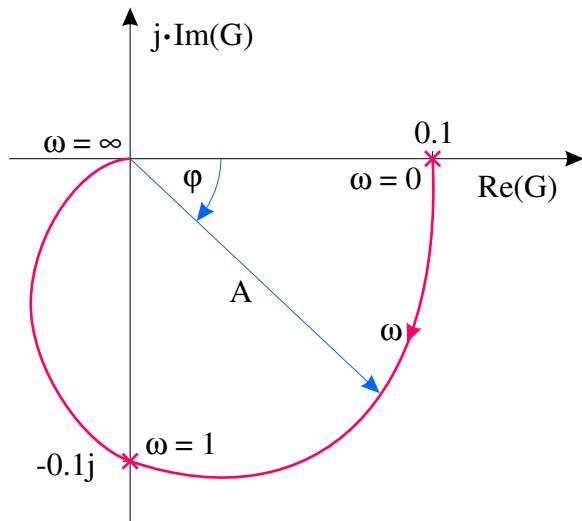


Abbildung 2.15: Nyquistortskurve: Imaginärteil über Realteil des Frequenzganges mit Frequenz als Parameter der Kurve

2.7 P-Glied

Andere Bezeichnungen: P-Regler, Verstärker

Beispiel: (Ideal) Audio-Verstärker

„Differenzialgleichung“ im Zeitbereich:

$$v(t) = K \cdot u(t)$$

„Differenzialgleichung“ im Bildbereich:

$$V(s) = K \cdot U(s)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = K$$

Pole: keine

Nullstellen: keine

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = K$$

Amplitudengang:

$$A = |G(j\omega)| = K$$

Phasengang:

$$\varphi = 0$$

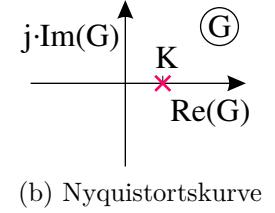
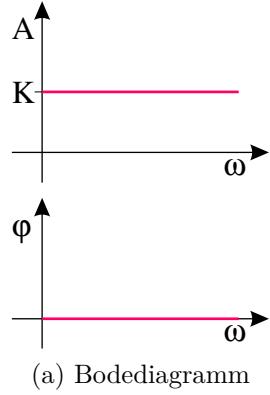


Abbildung 2.16: Bodediagramm und Nyquistortskurve eines P-Glieds

Sprungantwort im Bildbereich:

$$H(s) = G(s) \cdot \mathcal{L}\{s(t)\} = G(s) \cdot \frac{1}{s} = K \cdot \frac{1}{s}$$

Sprungantwort im Zeitbereich (vergleiche Tabelle 2.1):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{K \cdot \frac{1}{s}\right\} = K$$

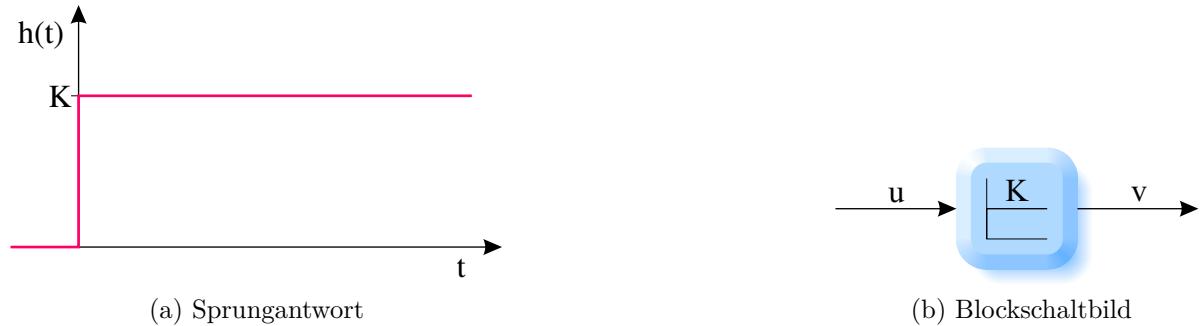


Abbildung 2.17: Sprungantwort und Blockschaltbild eines P-Glieds

2.8 P-T₁

Andere Bezeichnungen: Tiefpass 1. Ordnung, Verzögerungsglied 1. Ordnung

Beispiel: Aufladung eines Kondensators C über einen Widerstand R

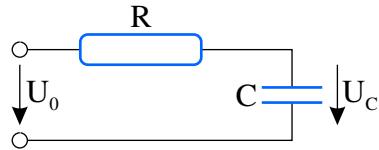


Abbildung 2.18: Beispiel für ein P-T₁

Differenzialgleichung im Zeitbereich:

$$T\dot{v}(t) + v(t) = K \cdot u(t)$$

Differenzialgleichung im Bildbereich:

$$V(s) \cdot (Ts + 1) = K \cdot U(s)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

Pole:

$$Ts + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{T}$$

Nullstellen: keine

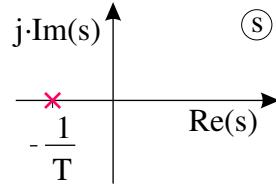


Abbildung 2.19: Pole (und Nullstellen) eines (stabilen) P-T₁

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1}$$

Amplitudengang:

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

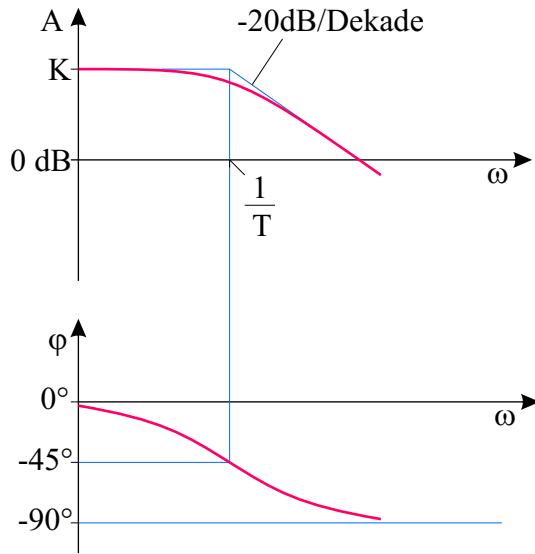


Abbildung 2.20: Bodediagramm eines P-T₁ mit Eckfrequenz $\omega_e = 1/T$

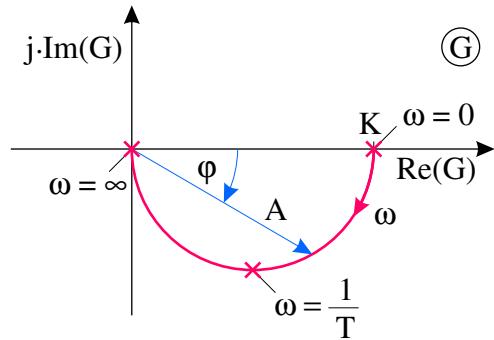


Abbildung 2.21: Nyquistortskurve eines P-T₁

Sprungantwort im Bildbereich:

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \dots \text{PBZ} \dots = \frac{K}{s} - \frac{KT}{Ts + 1} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{T}}$$

Sprungantwort im Zeitbereich (vergleiche Tabelle 2.1):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = K - Ke^{-\frac{t}{T}} = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

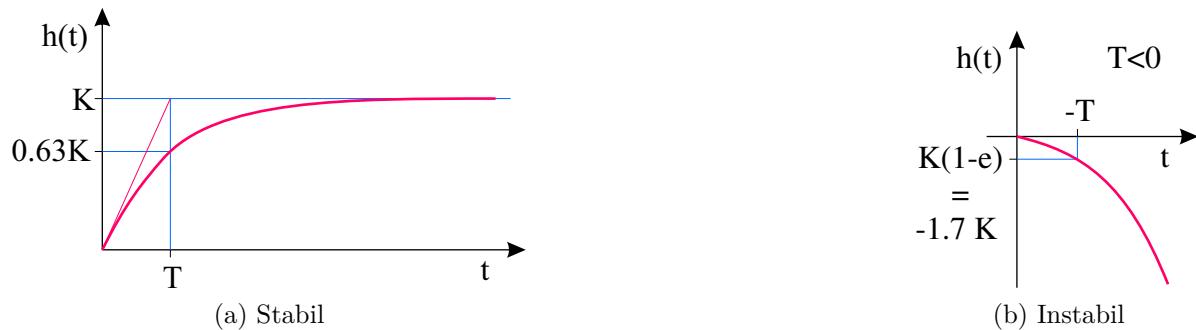


Abbildung 2.22: Sprungantwort eines P-T₁

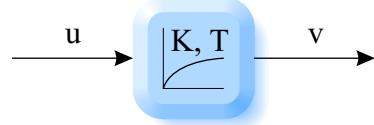


Abbildung 2.23: Blockschaltbild eines P-T₁

2.9 P-T₂

Andere Bezeichnungen: Tiefpass 2. Ordnung, Verzögerungsglied 2. Ordnung, Swinger 2. Ordnung

Beispiel: Feder-Masse-Schwinger (Abschnitt 2.1)

Differenzialgleichung im Zeitbereich:

$$\ddot{v}(t) + 2D\omega_0\dot{v}(t) + \omega_0^2 v(t) = K\omega_0^2 u(t)$$

Differenzialgleichung im Bildbereich:

$$V(s) \cdot (s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2) = K\omega_0^2 U(s)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Pole: vergleiche Abschnitt 2.4

Nullstellen: keine

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2D\omega_0\omega j}$$

Amplitudengang:

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2D\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

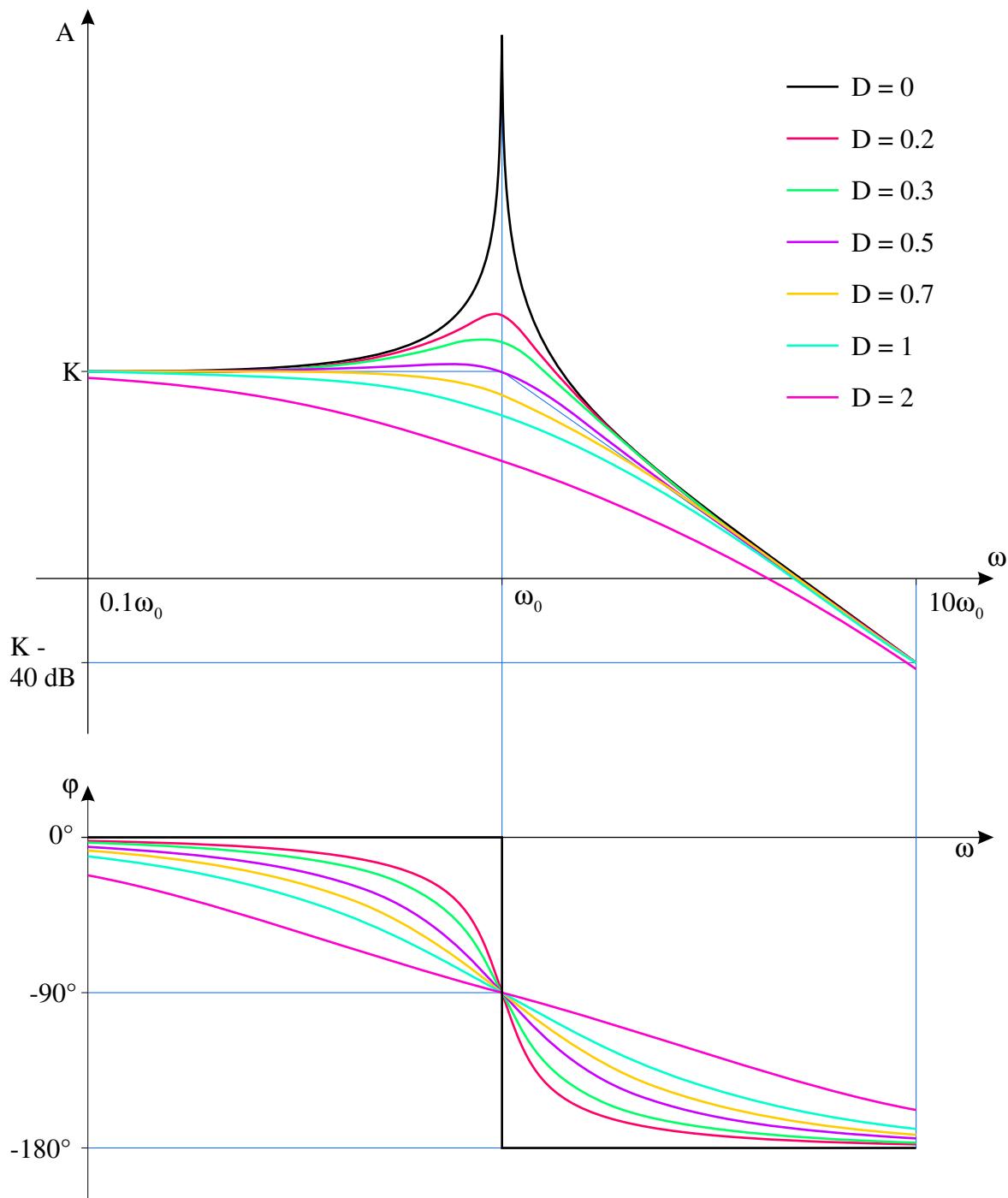


Abbildung 2.24: Bodediagramm eines P-T₂ bei unterschiedlichen Dämpfungen

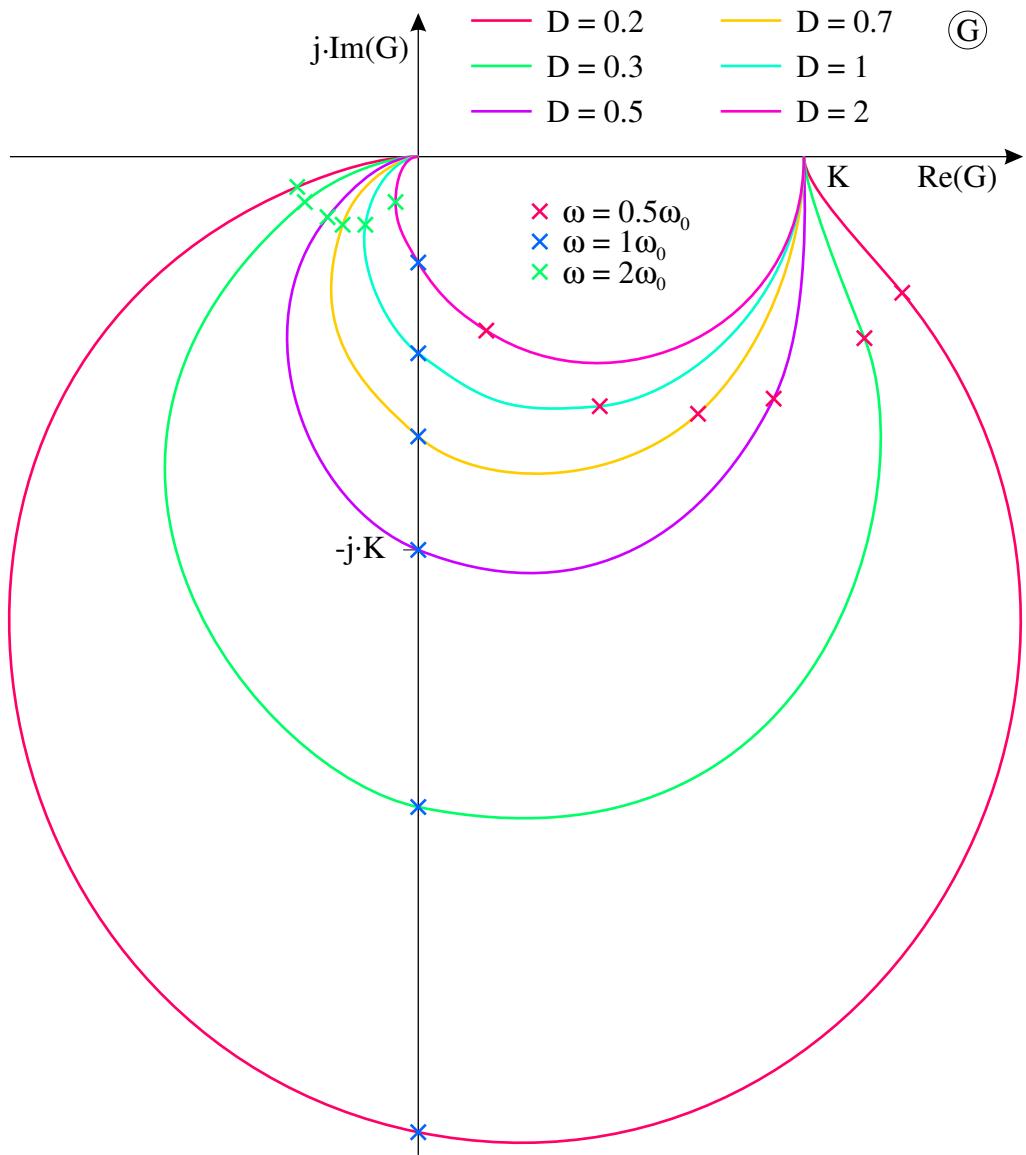


Abbildung 2.25: Nyquistortskurve eines P-T₂ bei unterschiedlichen Dämpfungen

Sprungantwort (vergleiche Gleichung (2.1)):

$$h(t) = K \left(1 - e^{-D\omega_0 t} \left(\cos(\sqrt{1-D^2}\omega_0 t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\sqrt{1-D^2}\omega_0 t) \right) \right)$$

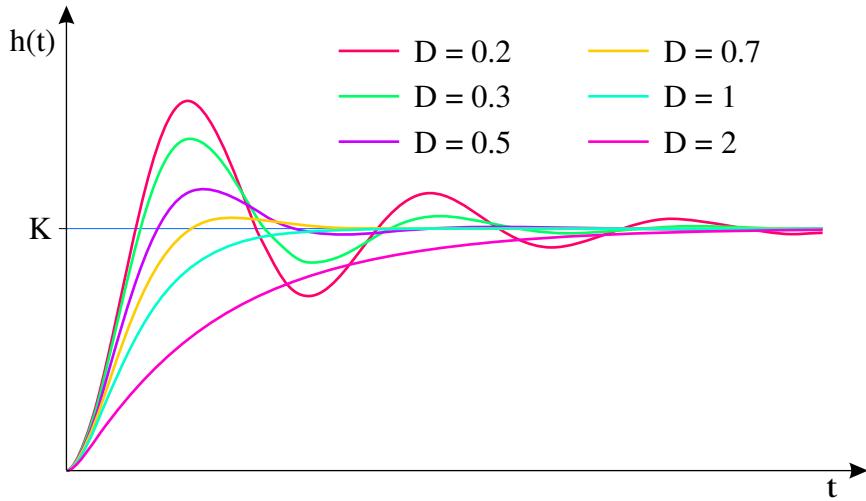


Abbildung 2.26: Sprungantwort eines P-T₂ bei unterschiedlichen Dämpfungen

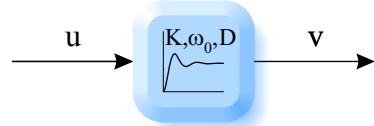


Abbildung 2.27: Blockschaltbild eines P-T₂

2.10 I-Glied

Andere Bezeichnungen: Integrator, Energiespeicher

Beispiel: Wasserstand in einem Behälter

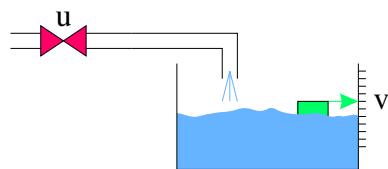


Abbildung 2.28: Beispiel für ein I-Glied

Integralgleichung im Zeitbereich:

$$v(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau + v(t=0)$$

Differenzialgleichung im Zeitbereich:

$$\dot{v}(t) T_I = u(t)$$

Differenzialgleichung im Bildbereich:

$$V(s) s \cdot T_I = U(s)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_I \cdot s} \left(= \frac{K_I}{s} \quad \text{mit} \quad K_I = \frac{1}{T_I} \right)$$

Pole:

$$T_I s = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 0$$

Nullstellen: keine

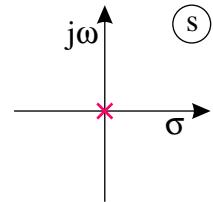


Abbildung 2.29: Pole (und Nullstellen) eines I-Gliedes

Frequenzgang:

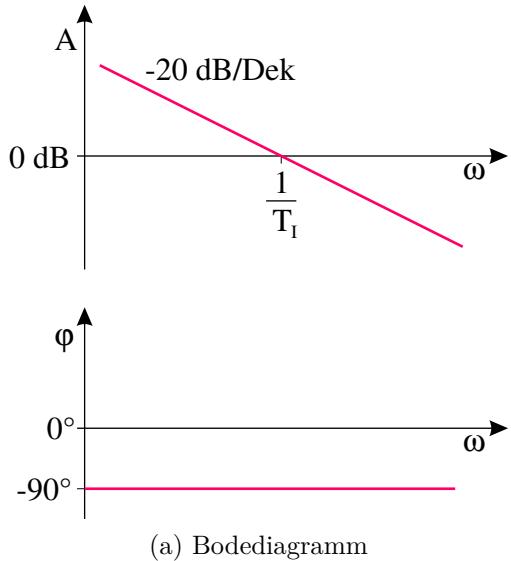
$$G(j\omega) = \frac{1}{T_I j\omega} = -j \frac{1}{\omega T_I} = \frac{1}{\omega T_I} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Amplitudengang:

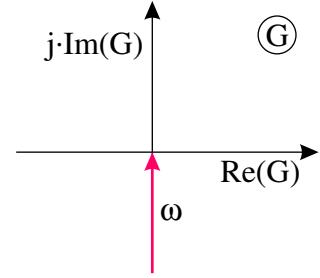
$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega T_I}$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{-\frac{1}{\omega T_I}}{0} = -\arctan \infty = -\frac{\pi}{2}$$



(a) Bodediagramm



(b) Nyquistortskurve

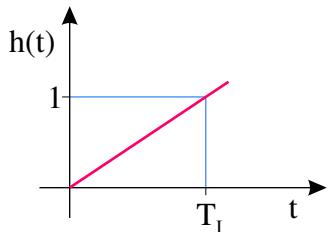
Abbildung 2.30: Bodediagramm und Nyquistortskurve eines I-Glieds

Sprungantwort im Bildbereich:

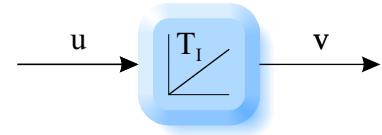
$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{T_I s} \frac{1}{s} = \frac{1}{T_I s^2}$$

Sprungantwort im Zeitbereich:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{T_I s^2}\right\} = \frac{t}{T_I} = \frac{1}{T_I} t$$



(a) Sprungantwort



(b) Blockschaltbild

Abbildung 2.31: Sprungantwort und Blockschaltbild eines I-Glieds

2.11 D-Glied

Andere Bezeichnungen: Differenzierer

Beispiel: Drehwinkel der Tachonadel ist die Ableitung des Radwinkels:

$$\varphi_{Tacho} = \dot{\varphi}_{Rad}$$



Abbildung 2.32: Beispiel für ein D-Glied

Differenzialgleichung im Zeitbereich:

$$v(t) = T_D \dot{u}(t)$$

Differenzialgleichung im Bildbereich:

$$V(s) = T_D s U(s)$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = T_D s$$

Pole: keine

Nullstellen:

$$T_D s = 0 \Rightarrow s_1 = 0$$

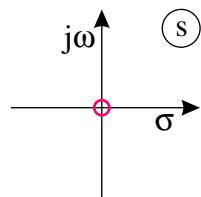


Abbildung 2.33: (Pole und) Nullstellen eines D-Gliedes

Frequenzgang:

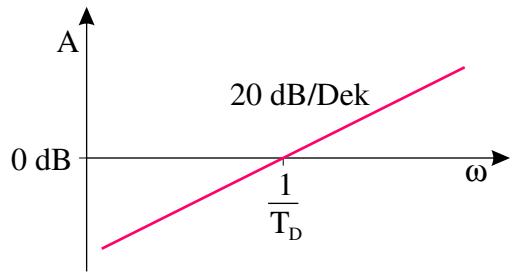
$$G(j\omega) = j\omega T_D = \omega T_D e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Amplitudengang:

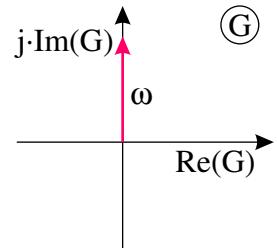
$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \omega T_D$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega T_D}{0} = \arctan \infty = \frac{\pi}{2}$$



(a) Bodediagramm



(b) Nyquistortskurve

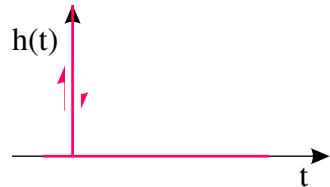
Abbildung 2.34: Bodediagramm und Nyquistortskurve eines D-Glieds

Sprungantwort im Bildbereich:

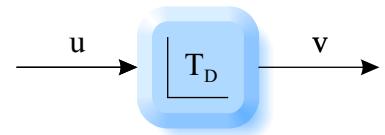
$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} = T_D s \frac{1}{s} = T_D$$

Sprungantwort im Zeitbereich (vergleiche Tabelle 2.1):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{T_D\} = T_D \delta(t) \quad (\text{Dirac-Stoß})$$



(a) Sprungantwort



(b) Blockschaltbild

Abbildung 2.35: Sprungantwort und Blockschaltbild eines D-Glieds

2.12 PID-Glied

Andere Bezeichnungen: PID-Regler

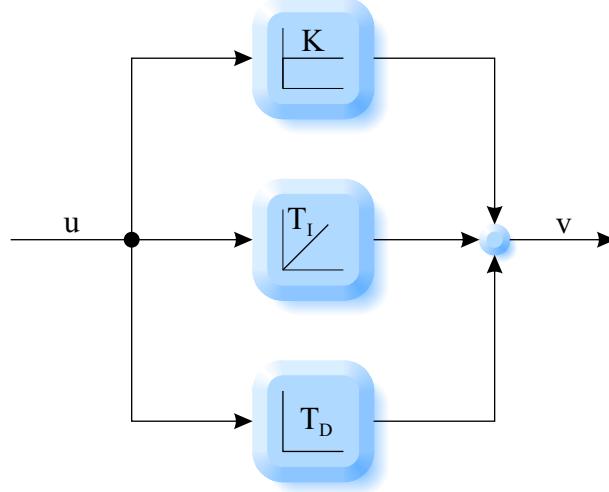


Abbildung 2.36: Parallelschaltung von P-Glied, I-Glied und D-Glied

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = K + \frac{1}{T_I s} + T_D s = \frac{K T_I s + 1 + T_D T_I s^2}{T_I s}$$

mit:

$$T_I = \frac{T_N}{K} \quad \text{und} \quad T_D = T_V K$$

$$G(s) = \frac{K \frac{T_N}{K} s + 1 + T_V K \frac{T_N}{K} s^2}{\frac{T_N}{K} s} = K \frac{T_N s + 1 + T_V T_N s^2}{T_N s} = K \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s \right)$$

mit:

T_N : Nachstellzeit und T_V : Vorhaltzeit

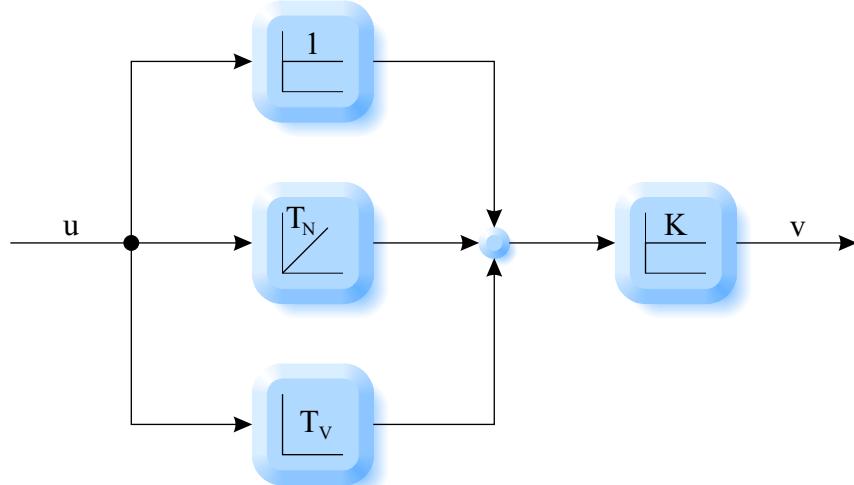


Abbildung 2.37: Gerätenahe Darstellung eines PID-Gliedes

Pole:

$$s_1 = 0$$

Nullstellen:

$$T_V T_N s^2 + T_N s + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \omega_{E1,2}$$

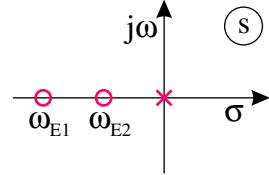


Abbildung 2.38: Pole und Nullstellen eines PID-Gliedes

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = K + \frac{1}{j\omega T_I} + j\omega T_D = K + \left(\frac{-1}{\omega T_I} + \omega T_D \right) j$$

Schnittpunkt mit der 0-Grad-Achse:

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad Im = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{\omega T_I} + \omega T_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega T_I} = \omega T_D \quad \Rightarrow \\ \omega_m = \sqrt{\frac{1}{T_I \cdot T_D}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{T_N}{K} \cdot T_V K}} = \sqrt{\frac{1}{T_N \cdot T_V}} \end{aligned}$$

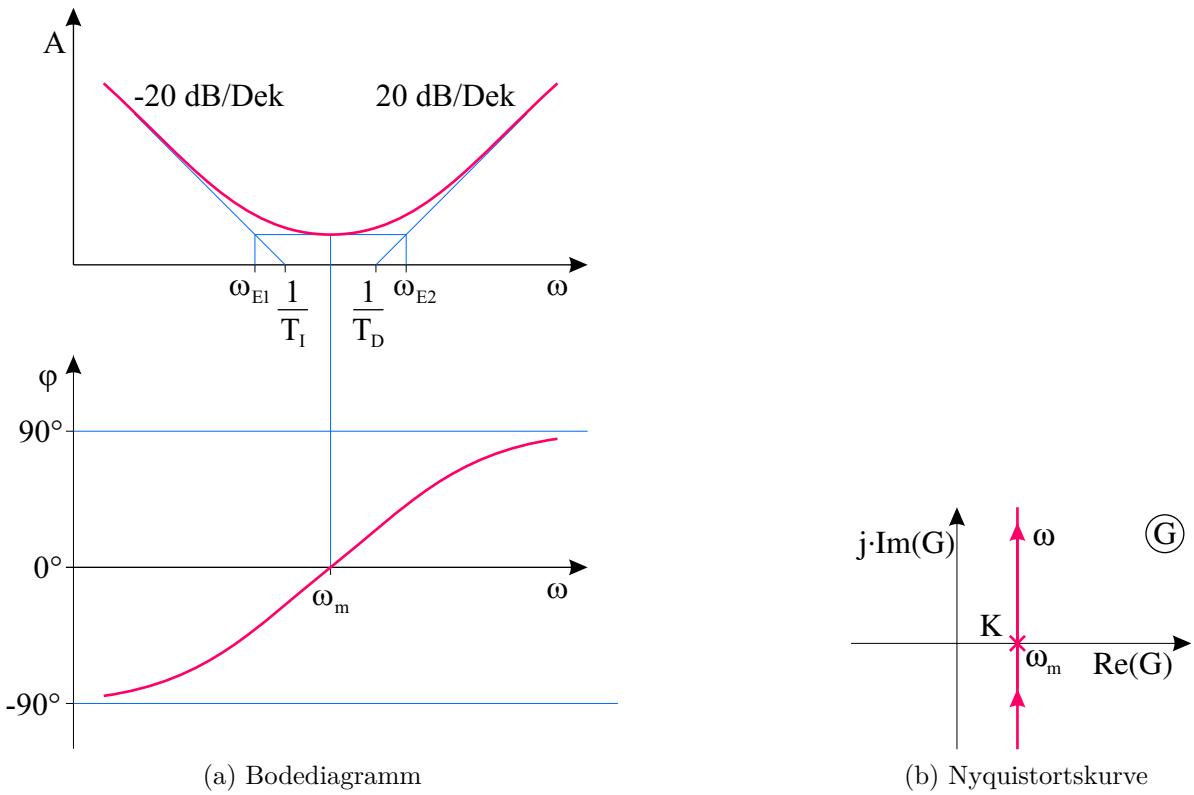


Abbildung 2.39: Bodediagramm und Nyquistortskurve eines PID-Glieds

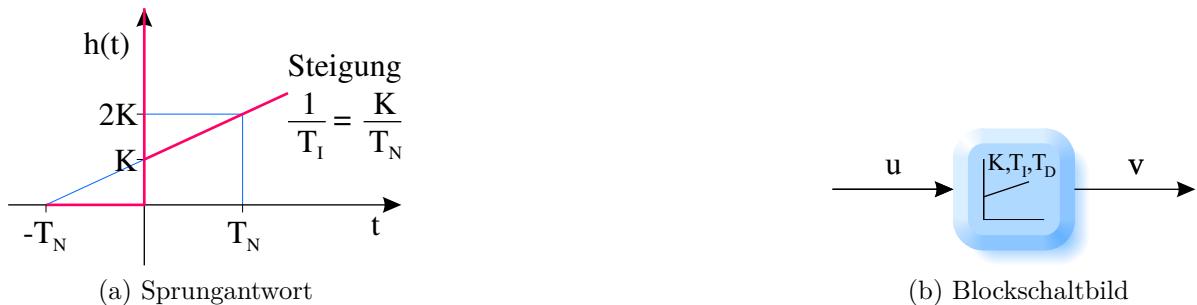


Abbildung 2.40: Sprungantwort und Blockschaltbild eines PID-Glieds

2.13 Totzeit

Andere Bezeichnungen: Laufzeit

Beispiel: Förderband

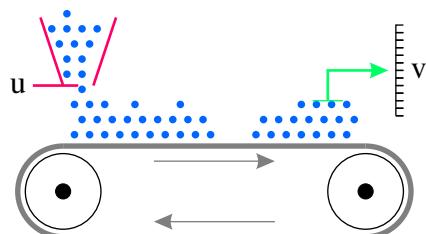


Abbildung 2.41: Förderband als Beispiel für eine Totzeit

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = e^{-sT_T}$$

Pole: keine

Nullstellen: keine

Frequenzgang:

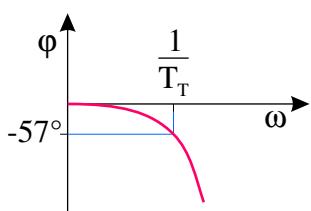
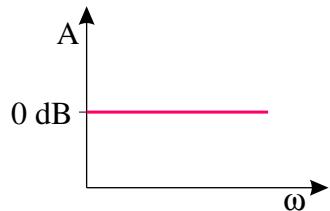
$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_T}$$

Amplitudengang:

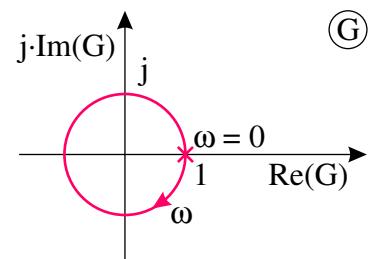
$$A(\omega) = |G(j\omega)| = 1$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = -\omega T_T$$

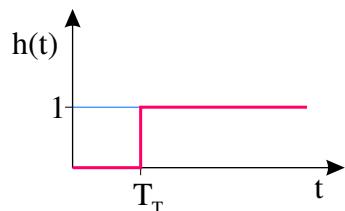


(a) Bodediagramm

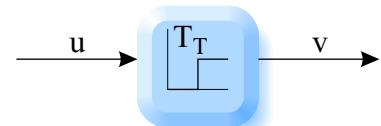


(b) Nyquistortskurve

Abbildung 2.42: Bodediagramm und Nyquistortskurve einer Totzeit



(a) Sprungantwort



(b) Blockschaltbild

Abbildung 2.43: Sprungantwort und Blockschaltbild einer Totzeit

2.14 Zustandsraumdarstellung

Differenzialgleichung eines Systems zweiter Ordnung:

$$\ddot{v} + 2D\omega_0\dot{v} + \omega_0^2 v = K\omega_0^2 u$$

Einführung von 2 Zustandsvariablen:

$$\begin{aligned} x_1 &= v && (\text{Weg}) \\ x_2 &= \dot{v} && (\text{Geschwindigkeit}) \end{aligned}$$

1. Differenzialgleichung:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

2. Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 + 2D\omega_0 x_2 + \omega_0^2 x_1 &= K\omega_0^2 u \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - 2D\omega_0 x_2 + K\omega_0^2 u \end{aligned}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2D\omega_0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ K\omega_0^2 \end{bmatrix}}_{B=b} u$$

Vektordifferenzialgleichung im Zustandsraum:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

Vektorausgangsgleichung:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

Ausgangsgleichung in expliziter Form:

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C=c^T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D=d} u$$

2.14.1 Blockschaltbild der Zustandsraumdarstellung

- ✓ „1 Integrator pro Zustand“
- ✓ „Zustandsgröße am Ausgang des Integrators“
- ✓ „Differenzialgleichung am Eingang des Integrators modellieren“

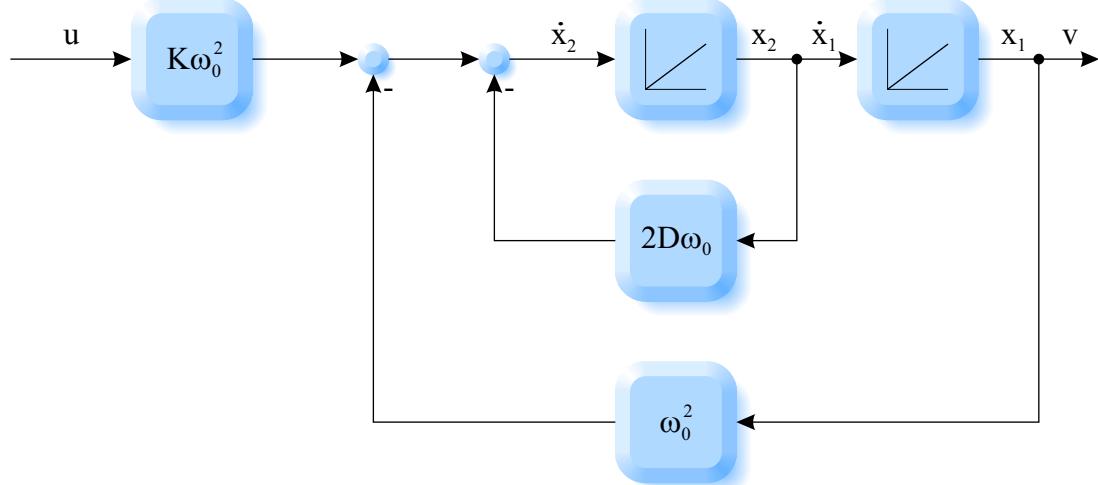


Abbildung 2.44: Blockschaltbild eines Schwingers zweiter Ordnung

Kapitel 3

Reglerauslegung

3.1 Stabilität

3.1.1 BIBO-Stabilität (Bounded Input Bounded Output)

„Stabil, wenn ein begrenztes Eingangssignal zu einem begrenzten Ausgangssignal führt“

Beispiel: Sprungantwort eines Integrators

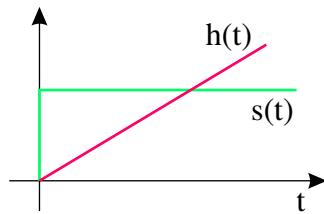


Abbildung 3.1: Sprungantwort eines Integrators

Ergebnis: Integrator ist nicht stabil.

3.1.2 Asymptotische Stabilität

- Stabil, wenn die Impulsantwort asymptotisch auf Null abklingt
- Instabil, wenn die Impulsantwort gegen unendlich geht
- Grenzstabil, wenn die Impulsantwort einen endlichen Wert nicht überschreitet

Beispiel: Impulsantwort eines Integrators

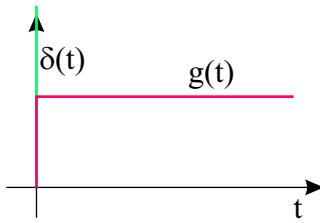


Abbildung 3.2: Impulsantwort eines Integrators

Ergebnis: Integrator ist grenzstabil.

Beispiel: Impulsantwort eines doppelten Integrators

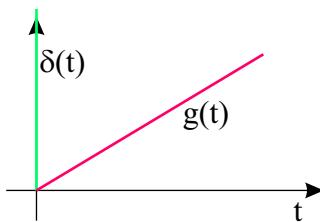


Abbildung 3.3: Impulsantwort eines doppelten Integrators

Ergebnis: Doppelter Integrator ist instabil.

3.1.3 Grundlegendes Stabilitätskriterium

- Stabil, wenn die Übertragungsfunktion nur Pole in der linken Halbebene besitzt
- Instabil, wenn mindestens ein Pol in der rechten Halbebene liegt oder wenn mindestens ein mehrfacher Pol auf der Imaginärachse liegt
- Grenzstabil, wenn kein Pol in der rechten Halbebene liegt, keine mehrfachen Pole auf der Imaginärachse vorhanden sind, sich aber mindestens ein einfacher Pol auf der Imaginärachse befindet

Beispiel: Allgemeines System zweiter Ordnung

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \dots$$

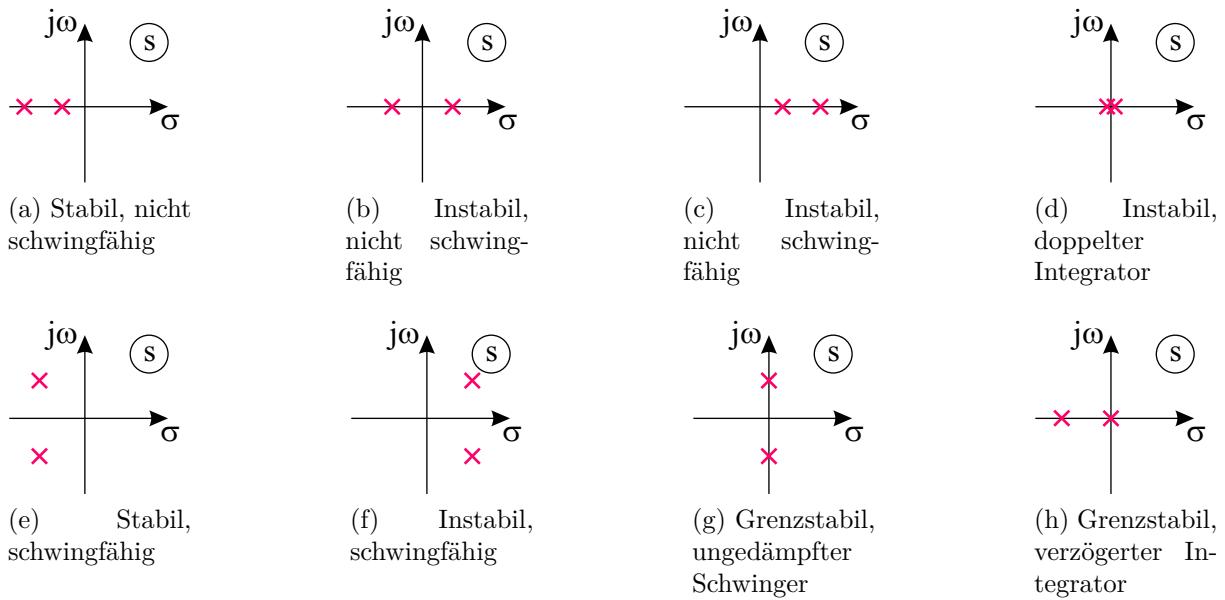


Abbildung 3.4: Polverteilungen von stabilen und instabilen Systemen

3.2 Regelkreis

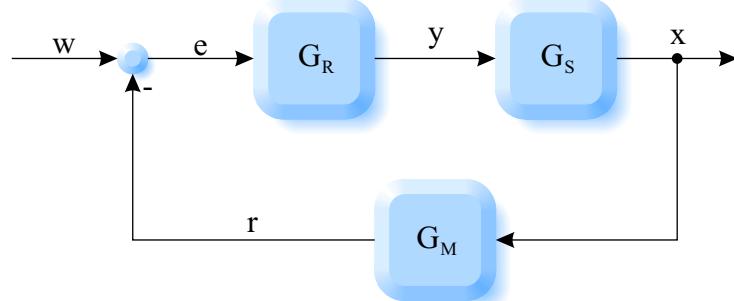


Abbildung 3.5: Allgemeiner Regelkreis

„Vom Ausgang rückwärts bis zu allen Eingängen, bzw. bis zu der Ausgangsgröße selbst“:

$$x = G_S \cdot y = G_S \cdot G_R \cdot e = G_S \cdot G_R \cdot (w - r) = G_S \cdot G_R \cdot (w - G_M \cdot x)$$

Sortieren:

$$x \cdot (1 + G_S \cdot G_R \cdot G_M) = G_S \cdot G_R \cdot w$$

Gesamtübertragungsfunktion:

$$G_g = \frac{x}{w} = \frac{G_S \cdot G_R}{1 + G_S \cdot G_R \cdot G_M} = \frac{G_V}{1 + G_0}$$

Vorwärtsübertragungsfunktion:

$$G_V = G_S \cdot G_R$$

Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$G_0 = G_S \cdot G_R \cdot G_M$$

3.2.1 Beispiel

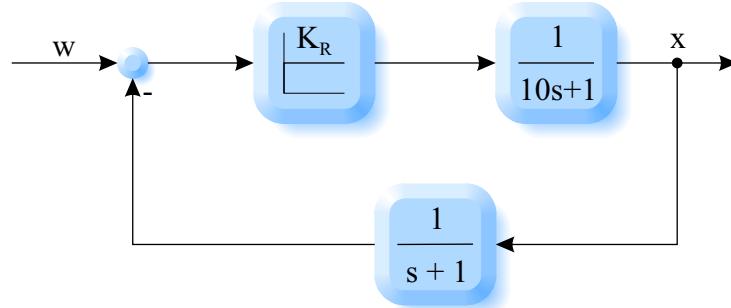


Abbildung 3.6: Beispiel eines einfachen Regelkreises

Gesamtübertragungsfunktion:

$$G_g = \frac{G_V}{1 + G_0} = \frac{K_R \cdot \frac{1}{10s+1}}{1 + K_R \cdot \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{s+1}} = \frac{K_R (s+1)}{(10s+1)(s+1) + K_R}$$

Pole:

$$10s^2 + 10s + s + 1 + K_R = 0$$

Normalform:

$$s^2 + \frac{11}{10}s + \frac{1 + K_R}{10} = 0$$

Zwei (reelle oder konjugiert komplexe) Pole:

$$s_{1,2} = -\frac{11}{20} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - \frac{1 + K_R}{10}}$$

Für die spezielle Reglerverstärkung $K_R = 1$:

$$s_{1,2} = -\frac{11}{20} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - \frac{2}{10}}$$

ergeben sich zwei reelle (stabile) Pole:

$$s_1 = -0.2 \quad \text{und} \quad s_2 = -0.87$$

Für die spezielle Reglerverstärkung $K_R = 10$:

$$s_{1,2} = -\frac{11}{20} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 - \frac{11}{10}}$$

ergeben sich zwei konjugiert komplexe (stabile) Pole:

$$s_{1,2} = -0.55 \pm 0.89j$$

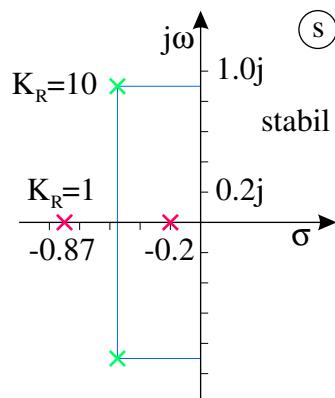


Abbildung 3.7: Pole eines einfachen Regelkreises in Abhängigkeit von der Reglerverstärkung

3.3 Nyquistkriterium

Vorüberlegung:

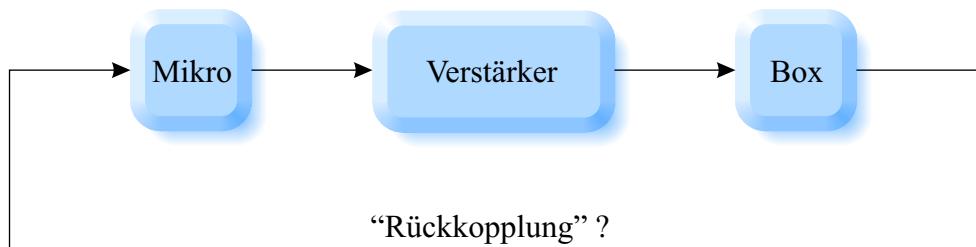


Abbildung 3.8: Wann wird der akustische Kreis instabil?

Rückkopplung nur, wenn:

1. Verstärkung groß genug (> 1) und
2. Mitkopplung vorhanden (Phasenverschiebung $= n \cdot 2\pi$)

Regelkreis:

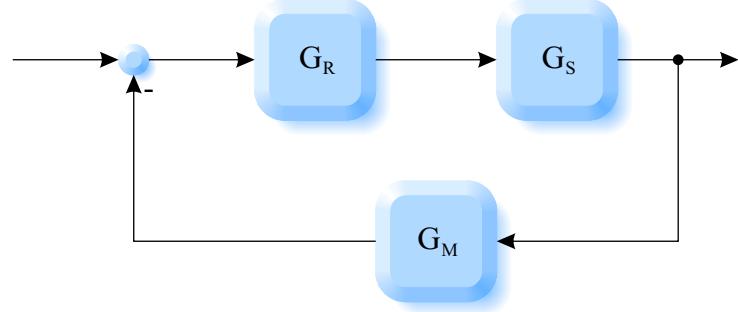


Abbildung 3.9: Allgemeiner Regelkreis

Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$G_0 = G_R \cdot G_S \cdot G_M$$

Kritischer Punkt:

$$A = |G_0| = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \angle G_0 = -\pi$$

3.3.1 Beispiel

P-Regler

$$G_R = K_R$$

P-T₂-Strecke:

$$G_S = \frac{0.1}{s^2 + s + 1}$$

P-T₁-Messglied:

$$G_M = \frac{1}{0.1s + 1}$$

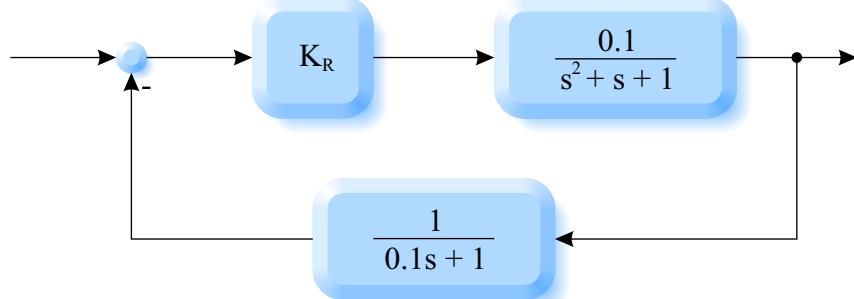


Abbildung 3.10: Blockschaltbild eines Regelkreises mit P-Regler, P-T₂-Strecke und P-T₁-Messglied

Offener Kreis:

$$G_0 = G_R \cdot G_S \cdot G_M = K_R \cdot \frac{0.1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{0.1s + 1}$$

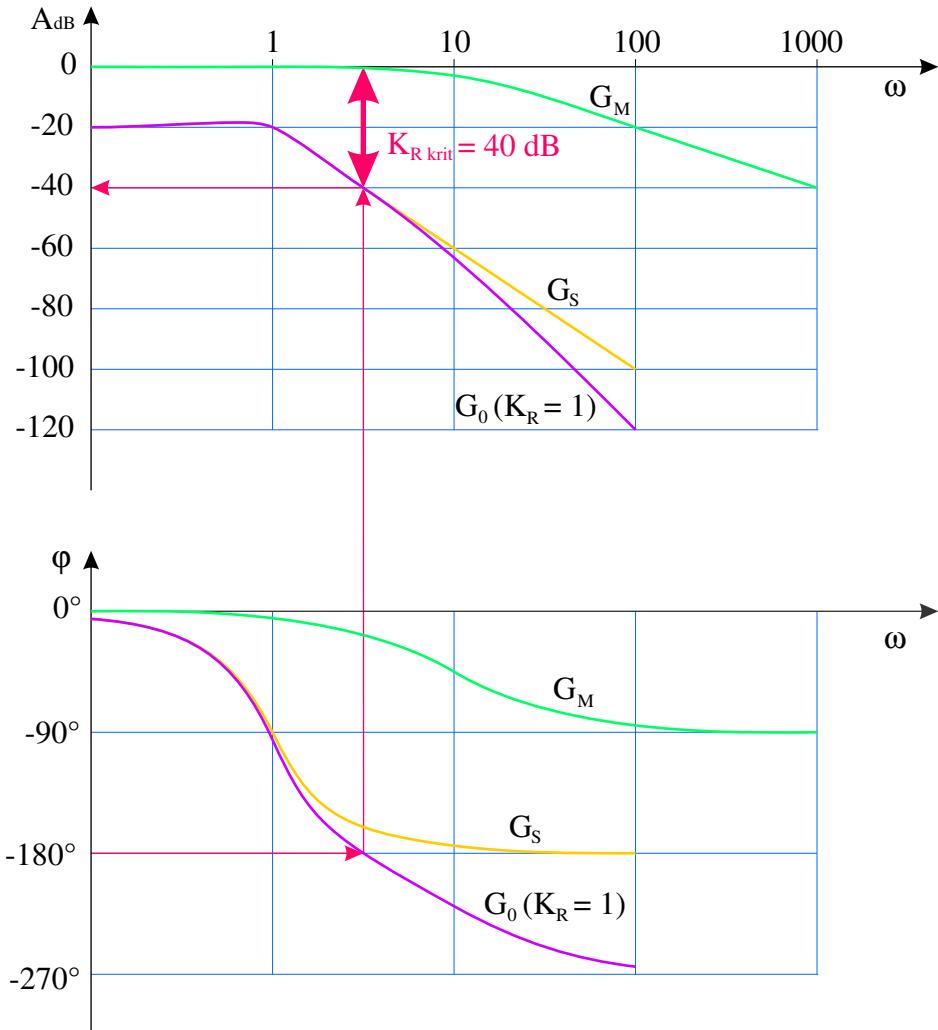


Abbildung 3.11: Bodediagramm des offenen Kreises (G_0)

Bis 0 dB hochschieben (Amplitudenreserve):

$$K_{R_{k\text{rit}}} \approx 40 \text{ dB} = 100 \quad (\text{geschlossener Kreis grenzstabil})$$

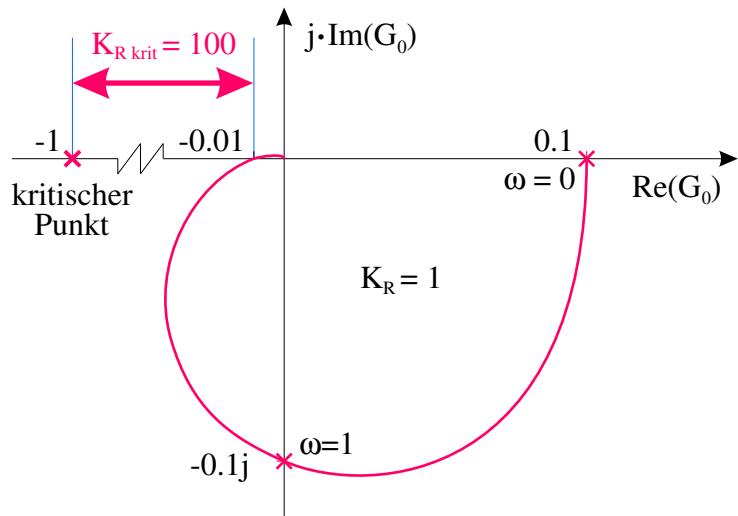


Abbildung 3.12: Nyquistortskurve des offenen Kreises (G_0)

Vereinfachtes Nyquistkriterium an der Nyquistortskurve des *offenen* Kreises: „Kritischer Punkt (-1) muss links liegen“, dann ist der *geschlossene* Kreis G_g stabil! (Voraussetzung: stabiler offener Kreis plus maximal zwei Integratoren)

3.3.2 Zwei Wege zur Stabilitätsuntersuchung des Regelkreises

1. Übertragungsfunktion des *geschlossenen* Kreises berechnen und „Grundlegendes Stabilitätskriterium“ am geschlossenen Kreis anwenden (Pole des geschlossenen Kreises in der linken Halbebene)
2. Übertragungsfunktion des *offenen* Kreises ($G_0 = G_R G_S G_M$) berechnen und Nyquistkriterium anwenden

3.4 Reglerentwurf

Drei (einander teilweise widersprechende) Forderungen:

1. Stabilität
2. Geschwindigkeit
3. Geringe Regelabweichung

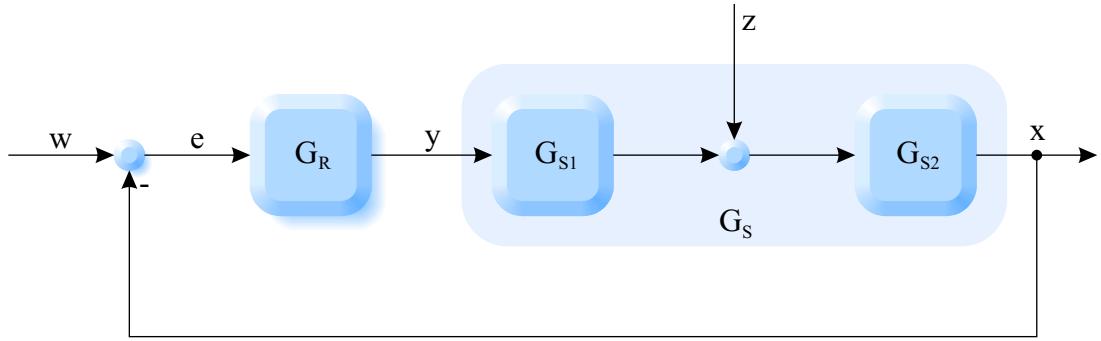


Abbildung 3.13: Allgemeiner Regelkreis mit Störgröße und geteilter Strecke

Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$G_0 = G_R \cdot G_{S1} \cdot G_{S2}$$

Führungsübertragungsfunktion:

$$G_g = \frac{x}{w} = \frac{G_0}{1 + G_0} \quad (\text{möglichst } \rightarrow 1)$$

Störübertragungsfunktion:

$$G_z = \frac{x}{z} = \frac{G_{S2}}{1 + G_0} \quad (\text{möglichst } \rightarrow 0)$$

Regelabweichung bei Führung:

$$G_{ew} = \frac{e}{w} = \frac{1}{1 + G_0} \quad (\text{möglichst } \rightarrow 0)$$

Regelabweichung bei Störung:

$$G_{ez} = \frac{e}{z} = -\frac{G_{S2}}{1 + G_0} \quad (\text{möglichst } \rightarrow 0)$$

3.4.1 Beispiel: P-T₃

$$G_{S1} = \frac{1}{s+1}$$

$$G_{S2} = \frac{2}{s^2 + s + 1}$$

P-Regler:

$$G_R = K_R$$

Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$G_0 = \frac{2K_R}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises:

$$G_g = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{\frac{2K_R}{(s+1)(s^2+s+1)}}{1+\frac{2K_R}{(s+1)(s^2+s+1)}} = \frac{2K_R}{(s+1)(s^2+s+1)+2K_R}$$

Gute Führung:

$$K_R \rightarrow \infty \Rightarrow G_g \rightarrow 1$$

Aber: wenn K_R zu groß \Rightarrow Regelkreis instabil.

Stationäre Regelabweichung:

$$G_{ew} = \frac{1}{1+G_0} = \frac{1}{1+\frac{2K_R}{(s+1)(s^2+s+1)}} = \frac{(s+1)(s^2+s+1)}{(s+1)(s^2+s+1)+2K_R}$$

geringe Regelabweichung:

$$K_R \rightarrow \infty \Rightarrow G_{ew} \rightarrow 0$$

Aber: s. o.

Grenzwertsatz der Laplace-Transformation:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Führungssprung:

$$w = s(t)$$

Stationäre Regelabweichung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ew}$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1)(s^2+s+1)}{(s+1)(s^2+s+1)+2K_R} = \frac{1}{1+2K_R}$$

Erhöhung der Reglerverstärkung verringert die stationäre Regelabweichung:

$$K_R \uparrow \Rightarrow e_\infty \downarrow$$

Bei Verwendung eines I-Reglers:

$$G_R = \frac{1}{T_I \cdot s}$$

Übertragungsfunktion des offenen Kreises:

$$G_0 = \frac{2}{T_I s (s+1) (s^2 + s + 1)}$$

Regelabweichung bei Führung:

$$G_{ew} = \frac{1}{1 + G_0} = \frac{1}{1 + \frac{2}{T_I s (s+1) (s^2 + s + 1)}} = \frac{T_I s (s+1) (s^2 + s + 1)}{T_I s (s+1) (s^2 + s + 1) + 2}$$

Stationäre Regelabweichung:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ew} = \frac{T_I 0 (0+1) (0^2 + 0 + 1)}{T_I 0 (0+1) (0^2 + 0 + 1) + 2} = \frac{0}{2} = 0$$

Keine stationäre Regelabweichung bei I-Regler (Nachteil: langsamer, Destabilisierung)

3.5 Gütekriterien

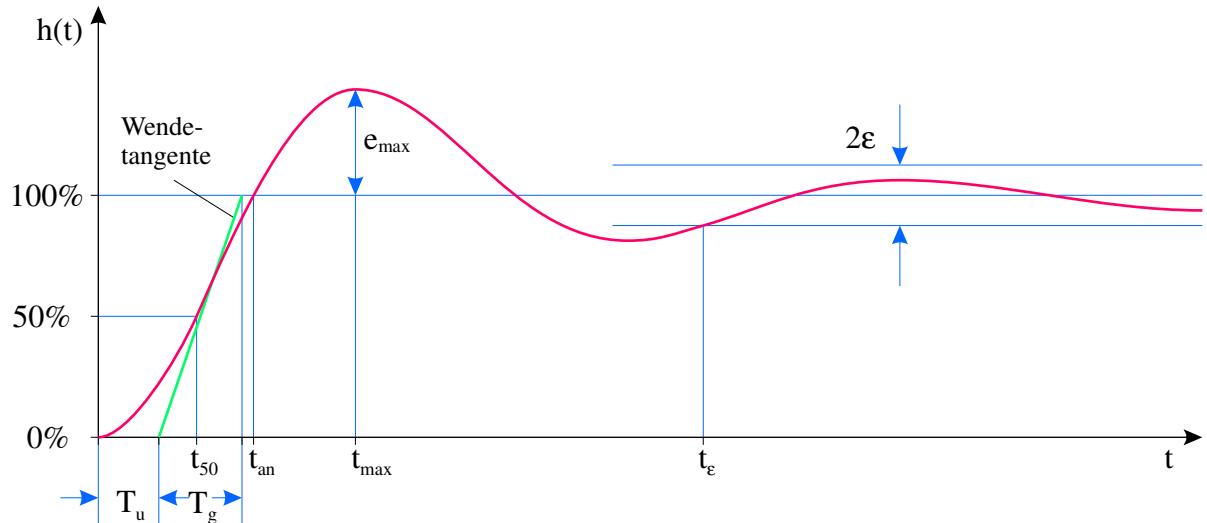


Abbildung 3.14: Sprungantwort (Führung)

e_{max} Maximale Überschwingweite

t_{max} e_{max} tritt auf.

T_u Verzugszeit (Wendetangente \cap 0 %)

T_g Ausgleichszeit (Wendetangente \cap 0 % \cap 100 %)

t_{an} Anregelzeit (Kurve \cap 100 %)

t_ε Betrag der Regelabweichung nie mehr größer als ε (z. B. $t_3\%$)

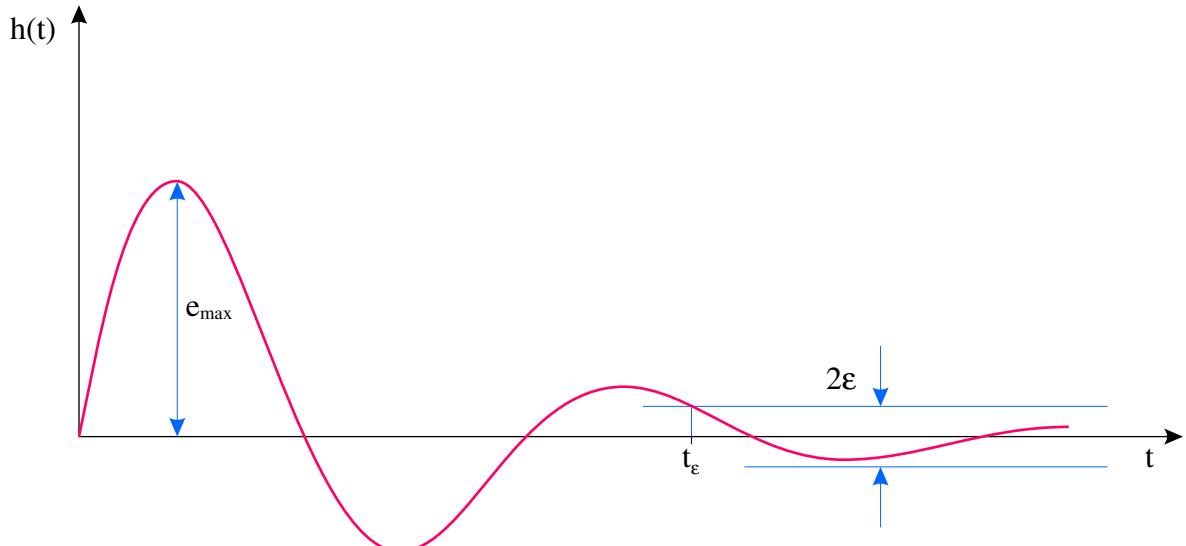


Abbildung 3.15: Sprungantwort (Störung)

Kostenfunktion:

$$K = K_1 \cdot t_{an} + K_2 \cdot t_\varepsilon + K_3 \cdot e_{max} + K_4 \dots = \text{Minimum } \downarrow$$

$\Rightarrow K_i$ willkürlich wählen \Rightarrow Kompromiss

3.5.1 Integralkriterien

$$I = \text{Min } \downarrow$$

Lineare Regelfläche:

$$I = \int_0^{\infty} e(t) \cdot dt \quad (e > 0)$$

Betragslineare Regelfläche:

$$I = \int_0^{\infty} |e(t)| \cdot dt \quad (\text{umständlich})$$

Quadratische Regelfläche:

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) \cdot dt \quad (\text{analytische Berechnung})$$

Zeitbeschwerde quadratische Regelfläche:

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) \cdot t \cdot dt \quad (\text{Dauer der Regelabweichung})$$

Stellaufwand:

$$I = \int_0^{\infty} (e^2(t) + \alpha \cdot y^2(t)) \cdot dt \quad (\alpha: \text{subjektiver Wichtungsfaktor})$$

3.6 Regleroptimierung mit Simulation

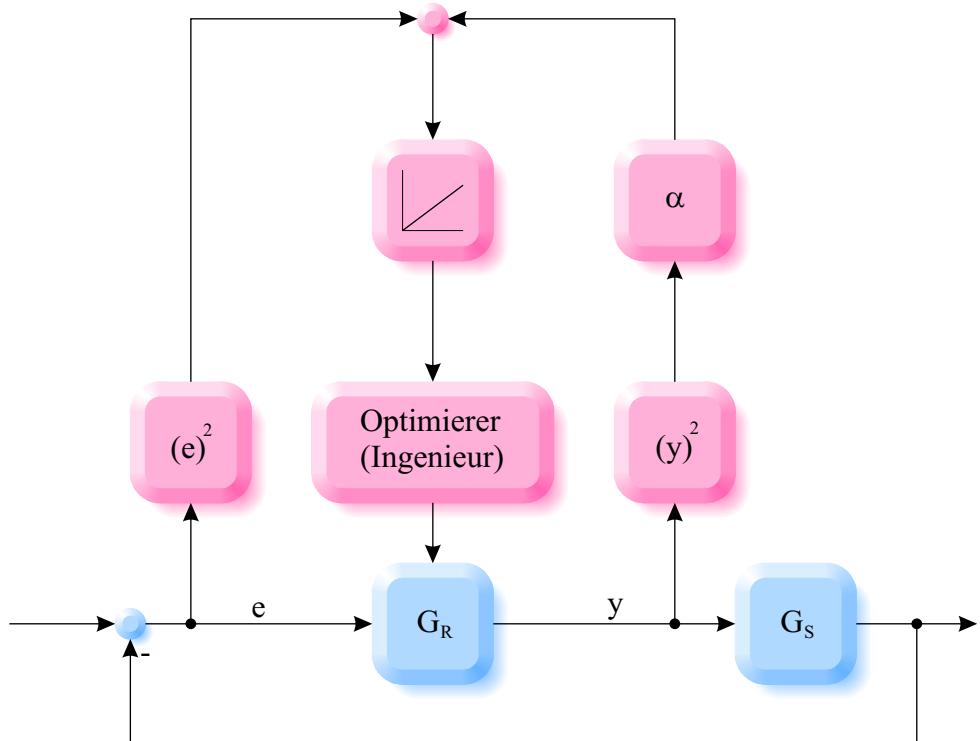


Abbildung 3.16: Regleroptimierung

3.7 Einstellregeln für Regelkreise

PID-Regler (vergleiche Abschnitt 2.12)

P Grundregelung

I Statische Genauigkeit (langsam)

D Geschwindigkeit (I-Kompensation)

Zwei bewährte Methoden:

3.7.1 Nach Ziegler und Nichols (Stabilitätsrand)

P-Regler aufdrehen, bis der Regelkreis stationär schwingt:

$$\rightarrow K_{R_{krit}}$$

Periodendauer der Schwingung messen:

$$\rightarrow T_{krit}$$

| Regler | Reglerverstärkung K_R | Nachstellzeit T_N | Vorhaltzeit T_V |
|--------|-------------------------|---------------------|-------------------|
| P | $0.5 K_{R_{krit}}$ | - | - |
| PI | $0.45 K_{R_{krit}}$ | $0.85 T_{krit}$ | - |
| PID | $0.6 K_{R_{krit}}$ | $0.5 T_{krit}$ | $0.12 T_{krit}$ |

Tabelle 3.1: Reglerverstärkung, Nachstellzeit und Vorhaltzeit in Abhängigkeit von den Parametern des Schwingversuchs

3.7.2 Nach Chien, Hrones und Reswick (Sprungantwort)

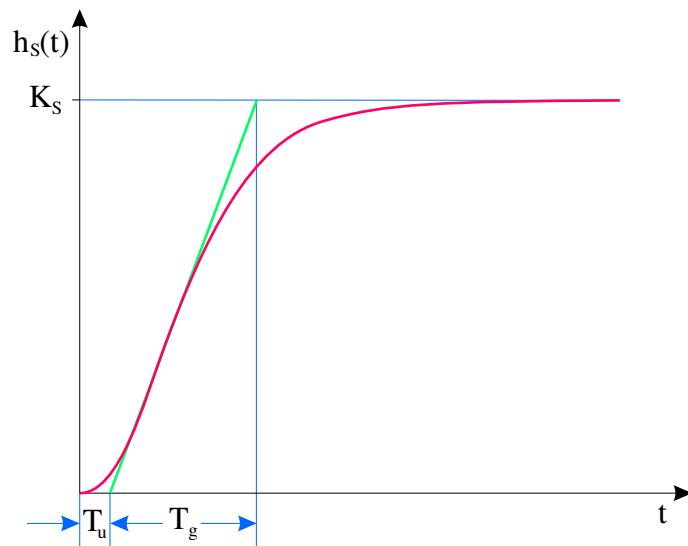


Abbildung 3.17: Sprungantwort einer Regelstrecke

- Wendetangente \rightarrow Verzugszeit T_u , Ausgleichszeit T_g
- Anwendbar, wenn $T_g/T_u > 3$

Definition einer Hilfsgröße:

$$K_H = \frac{T_g}{K_S T_u}$$

| Regler | Optimiert für | Überschwingen | K_R | T_N | T_V |
|--------|---------------|---------------|------------|------------|------------|
| P | Störung | 0 % | $0.3 K_H$ | - | - |
| | | 20 % | $0.7 K_H$ | - | - |
| | Führung | 0 % | $0.3 K_H$ | - | - |
| | | 20 % | $0.7 K_H$ | - | - |
| PI | Störung | 0 % | $0.6 K_H$ | $4.0 T_u$ | - |
| | | 20 % | $0.7 K_H$ | $2.3 T_u$ | - |
| | Führung | 0 % | $0.35 K_H$ | $1.2 T_g$ | - |
| | | 20 % | $0.6 K_H$ | $1.0 T_g$ | - |
| PID | Störung | 0 % | $0.95 K_H$ | $2.4 T_u$ | $0.42 T_u$ |
| | | 20 % | $1.2 K_H$ | $2.0 T_u$ | $0.42 T_u$ |
| | Führung | 0 % | $0.6 K_H$ | $1.0 T_g$ | $0.5 T_u$ |
| | | 20 % | $0.95 K_H$ | $1.35 T_g$ | $0.47 T_u$ |

Tabelle 3.2: Reglerverstärkung, Nachstellzeit und Vorhaltzeit in Abhängigkeit von statio-närer Verstärkung, Verzugszeit und Ausgleichszeit

3.8 Störgrößenaufschaltung

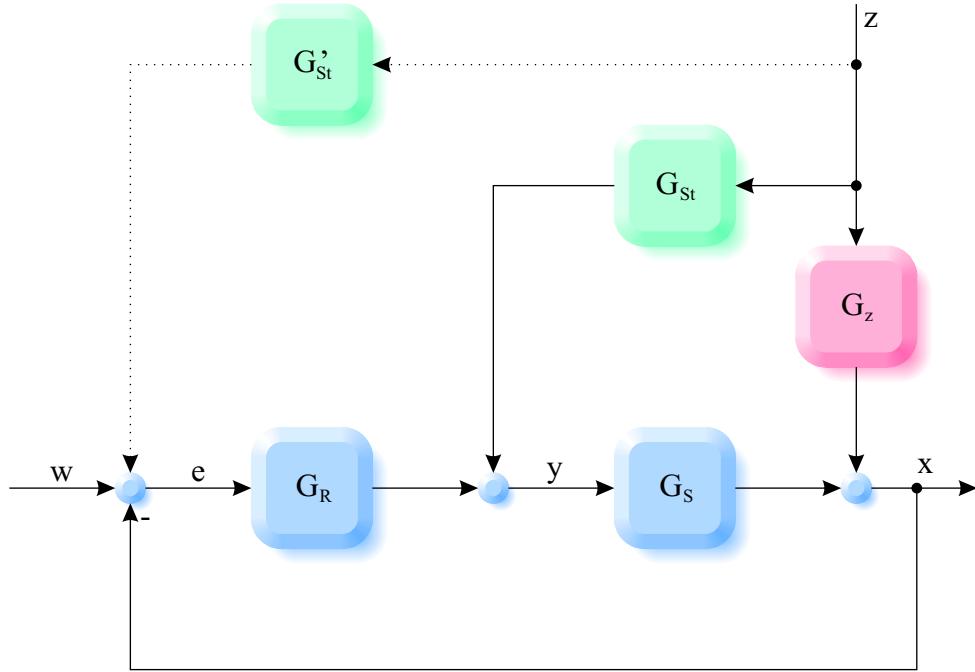


Abbildung 3.18: Störgrößenaufschaltung

Prinzip: Kompensation der Störgröße z , wenn sie messbar ist. Die Störgröße soll also möglichst keinen Einfluss auf die Ausgangsgröße x haben:

Übertragungsfunktion von z nach x :

$$G_{xz} = \frac{G_z + G_{St}G_S}{1 + G_RG_S} \stackrel{!}{=} 0$$

Zähler von G_{xz} muss verschwinden:

$$G_z + G_{St}G_S = 0$$

Bedingung für Störgrößenaufschaltungsübertragungsfunktion:

$$G_{St} = -\frac{G_z}{G_S}$$

Problem: G_{St} ist nicht immer exakt realisierbar

\Rightarrow Wenigstens stationäre Störunterdrückung ($s = 0$)

Alternative: Signal vor dem Regler aufschalten:

Neue Übertragungsfunktion von z nach x :

$$G_{xz} = \frac{G_z + G'_{St}G_RG_S}{1 + G_RG_S} \stackrel{!}{=} 0$$

Zähler gleich null:

$$G_z + G'_{St}G_RG_S = 0$$

Aufschaltungsbedingung:

$$G'_{St} = -\frac{G_z}{G_RG_S}$$

Vorteil: keine Stellenergie notwendig

Nachteil: Signal muss durch Regler

3.9 Vorsteuerung

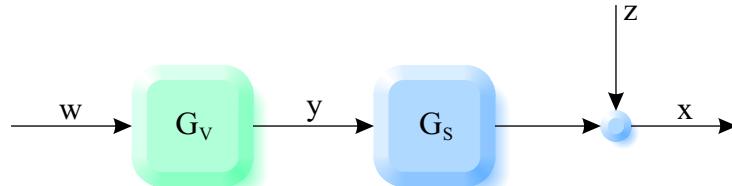


Abbildung 3.19: Reine Steuerung

Forderung:

$$x = w$$

Ideal:

$$G_V = \frac{1}{G_S}$$

z. B.:

$$G_S = \frac{2}{3s+1} \quad \Rightarrow \quad G_V = \frac{3s+1}{2}$$

Probleme:

1. G_S ist nicht genau bekannt.
2. G_S ist nicht exakt invertierbar (Totzeit, reiner Integrator, ...).
3. Störungen werden nicht erkannt.

Stationäre Vorsteuerung $G_{V_{st}}$ erfüllt die Forderung $x = w$ wenigstens nach dem Einstiegvorgang ($t \rightarrow \infty \Rightarrow s = 0$):

Beispiel oben:

$$G_{V_{st}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s+1}{2} = \frac{3 \cdot 0 + 1}{2} = 0.5$$

3.9.1 Kombination mit Regelung

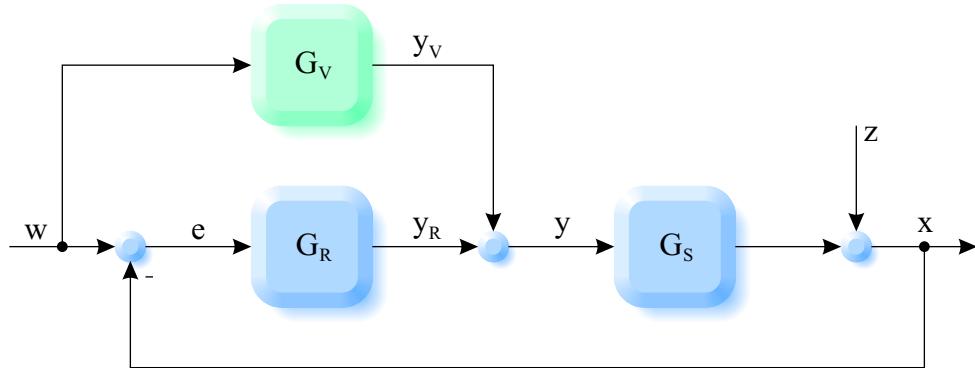


Abbildung 3.20: Kombination von Steuerung mit Regelung

Vorgehensweise:

1. Vorsteuerung G_V auf möglichst gute Inversion auslegen
2. Regler G_R auslegen (muss nur noch Unzulänglichkeiten der Steuerung kompensieren)

3.10 Digitale (zeitdiskrete) Regelung

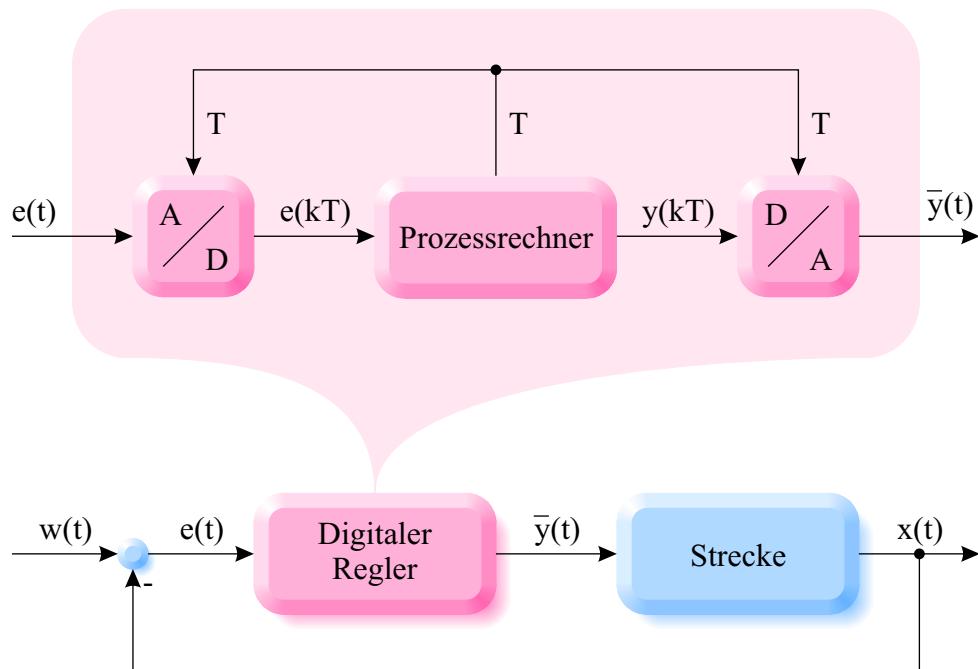


Abbildung 3.21: Digitale Regelung (T : Abtastzeit)

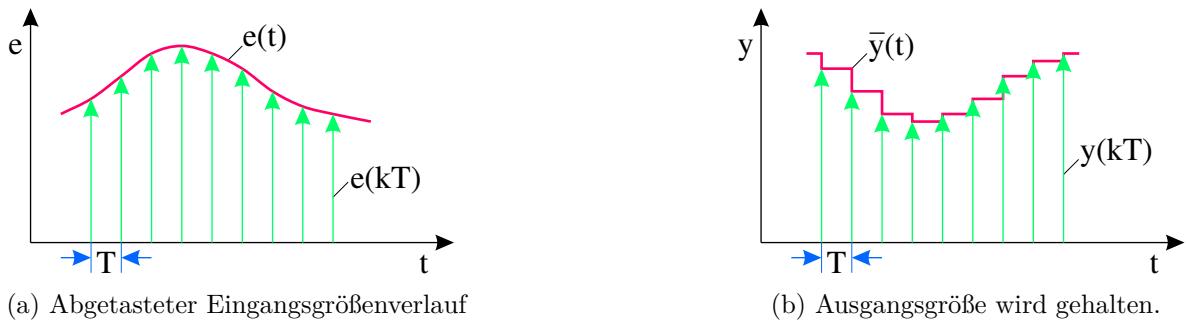


Abbildung 3.22: Abtastung bei digitaler Regelung

3.10.1 z -Transformation

Gegeben ist die Übertragungsfunktion im s -Bereich:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)}$$

Gesucht ist die Übertragungsfunktion im z -Bereich:

$$G(z) = \frac{v(kT)}{u(kT)}$$

und daraus abgeleitet, die Differenzengleichung:

$$v_{k+1} = f(v_k, v_{k-1}, \dots, u_{k+1}, u_k, u_{k-1}, \dots)$$

3.10.2 Näherungen

Rechteckregel:

$$s \approx \frac{z - 1}{T \cdot z}$$

Tustinformel:

$$s \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

3.10.3 Beispiel: Digitaler Tiefpass

Übertragungsfunktion im s -Bereich:

$$G(s) = \frac{2}{5s + 1}$$

Abtastzeit:

$$T = 0.1$$

Verwendung der Tustinformel:

$$s \approx 20 \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

Übertragungsfunktion im z -Bereich:

$$G(z) = \frac{2}{5 \cdot 20 \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{2(z+1)}{100(z-1) + z + 1} = \frac{2z + 2}{101z - 99}$$

Quotient aus Ausgangs- und Eingangsgröße:

$$G(z) = \frac{v_k}{u_k} = \frac{2z + 2}{101z - 99}$$

Über Kreuz multiplizieren:

$$v_k (101z - 99) = u_k (2z + 2)$$

„Multiplikation mit z bedeutet Verschieben in positive Zeitrichtung“:

$$v_k \cdot z \hat{=} v_{k+1}$$

Differenzengleichung:

$$101v_{k+1} - 99v_k = 2u_{k+1} + 2u_k$$

Nach „neuer Ausgangsgröße“ auflösen:

$$v_{k+1} = \frac{99v_k + 2u_{k+1} + 2u_k}{101}$$

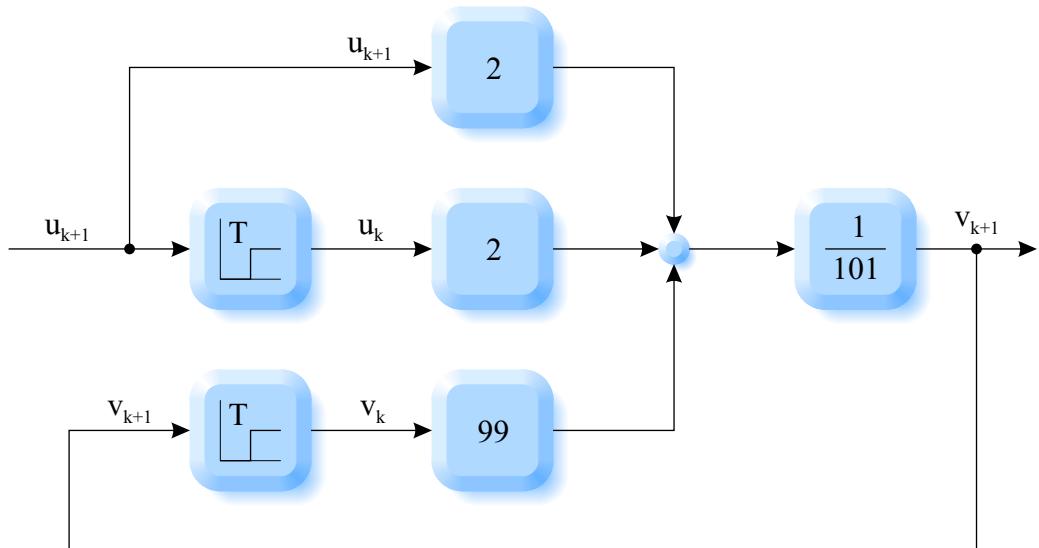


Abbildung 3.23: Diskrete Realisierung eines digitalen Tiefpasses

Teil II

Flugregelung

Kapitel 4

Einführung

4.1 Bezeichnungen der Luftfahrt

- Alle Bezeichnungen nach [1] - [2] (Erweiterungen: V_A , Ω_K)
- Alle Koordinatensysteme sind rechtshändig („Rechte Hand-Regel“).
- Zusammenfassung und individueller Test unter [3]
- Viele Abbildungen sind (mit freundlicher Genehmigung des Autors) [4] nachempfunden.

4.1.1 Bewegungsgrößen

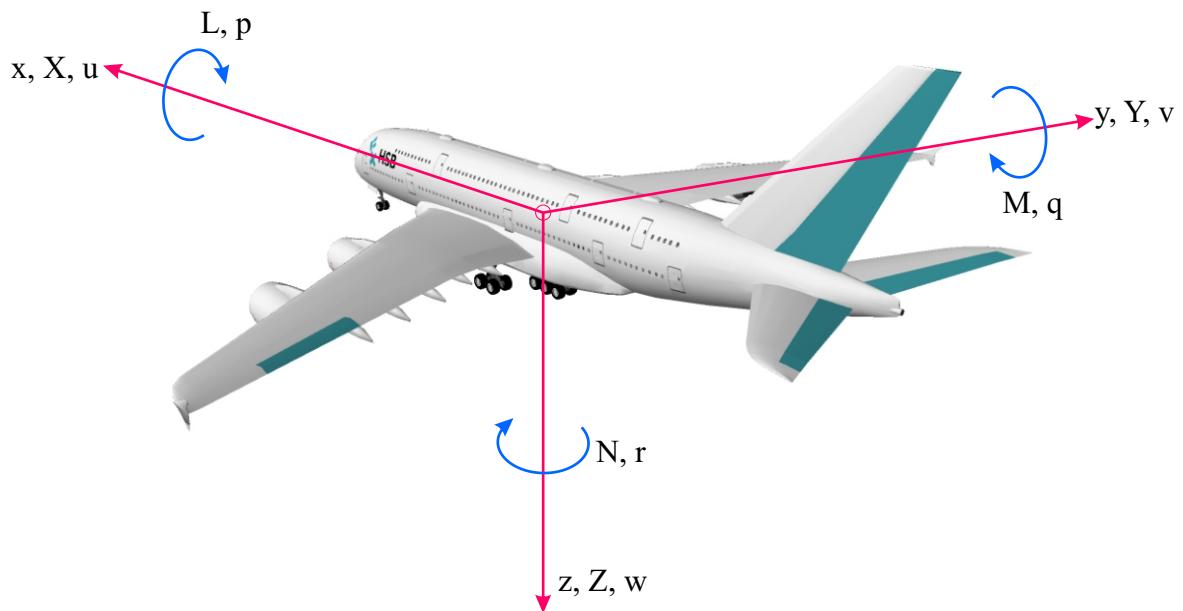


Abbildung 4.1: Bewegungsgrößen

Positionsvektor (Richtung, Strecke):

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{nach vorne} \\ \text{nach rechts} \\ \text{nach unten} \end{array}$$

Kraftvektor:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Momentenvektor:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Drehgeschwindigkeitsvektor:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{rollen} \\ \text{nicken} \\ \text{gieren} \end{array}$$

Lagewinkelvektor (Eulerwinkelvektor):

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix}$$

4.1.2 Indizes

A Aerodynamisch

K Bahn

W Wind

F Schub

f Flugzeugfestes (körperfestes) Koordinatensystem

a Flugwindfestes (aerodynamisches) Koordinatensystem

k (Flug)bahnfestes Koordinatensystem

g Erd(lot)festes (geodätisches) Koordinatensystem

Beispiele

Resultierende aerodynamische Kraft im aerodynamischen Koordinatensystem: \mathbf{R}_a^A

Resultierendes aerodynamisches Moment im bahnfesten Koordinatensystem: \mathbf{Q}_k^A

Schubkraft im flugzeugfesten Koordinatensystem: \mathbf{F}_f^F

Schubmoment: \mathbf{Q}^F

Gewichtskraft im geodätischen Koordinatensystem: \mathbf{G}_g

Gravitationsvektor (Erdbeschleunigung) im flugzeugfesten Koordinatensystem: \mathbf{g}_f

4.1.3 Geschwindigkeiten

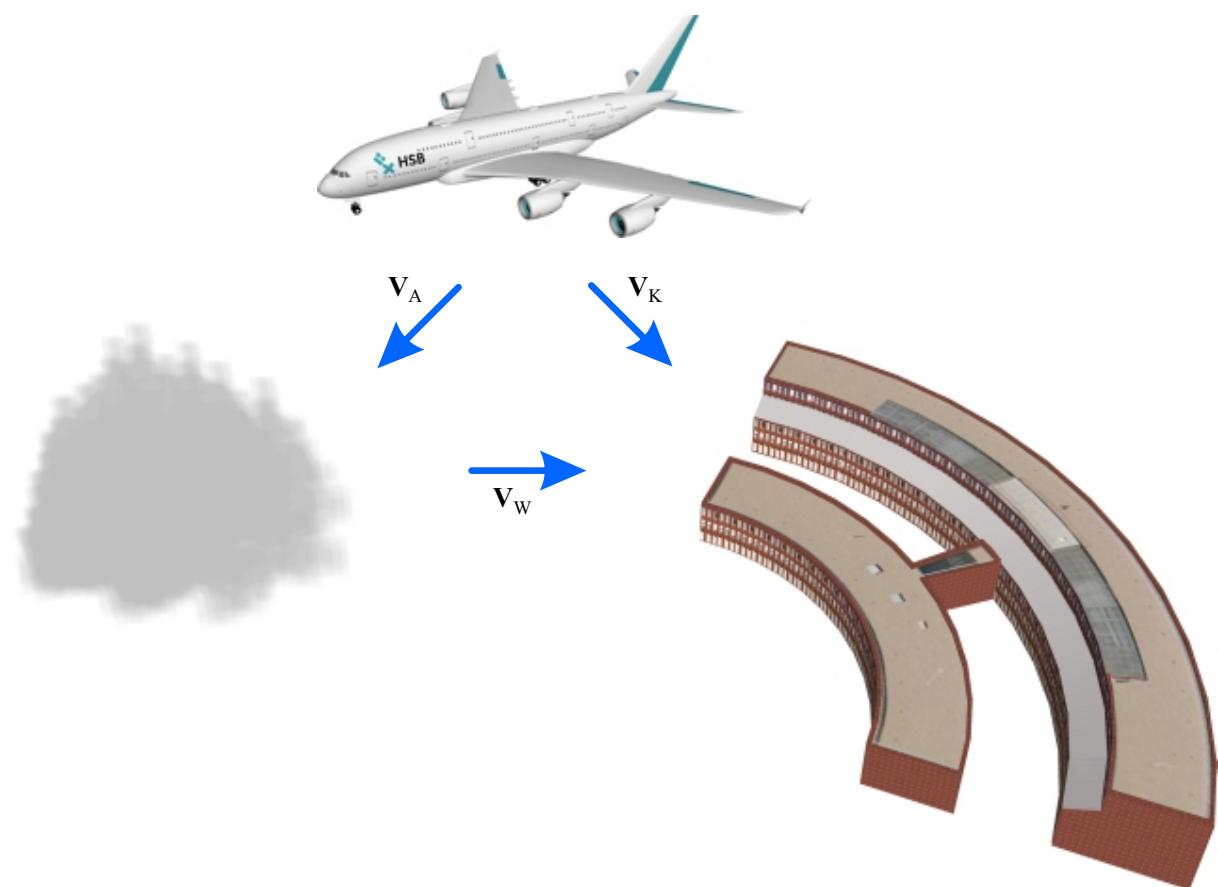


Abbildung 4.2: Fluggeschwindigkeit, Bahngeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit

Bahngeschwindigkeit \mathbf{V}_K Relativgeschwindigkeit des Flugzeugs gegenüber der Erde

Fluggeschwindigkeit \mathbf{V}_A Relativgeschwindigkeit des Flugzeugs gegenüber der Luft

Windgeschwindigkeit \mathbf{V}_W Relativgeschwindigkeit der Luft gegenüber der Erde

Zusammenhang zwischen Flug-, Bahn- und Windgeschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{V}_K = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_W$$

Äquivalenter Zusammenhang für Drehgeschwindigkeitsvektoren:

$$\boldsymbol{\Omega}_K = \boldsymbol{\Omega}_A + \boldsymbol{\Omega}_W$$

4.1.4 Stellgrößen

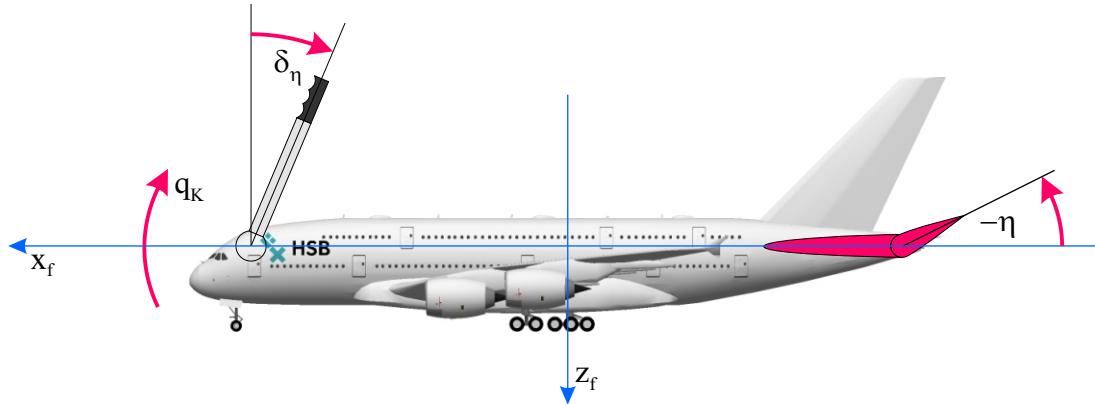


Abbildung 4.3: Ein positiver Steuerknüppelausschlag (Ziehen) führt zu einem negativen Höhenruderausschlag und dadurch zu einem positiven Nickmoment.

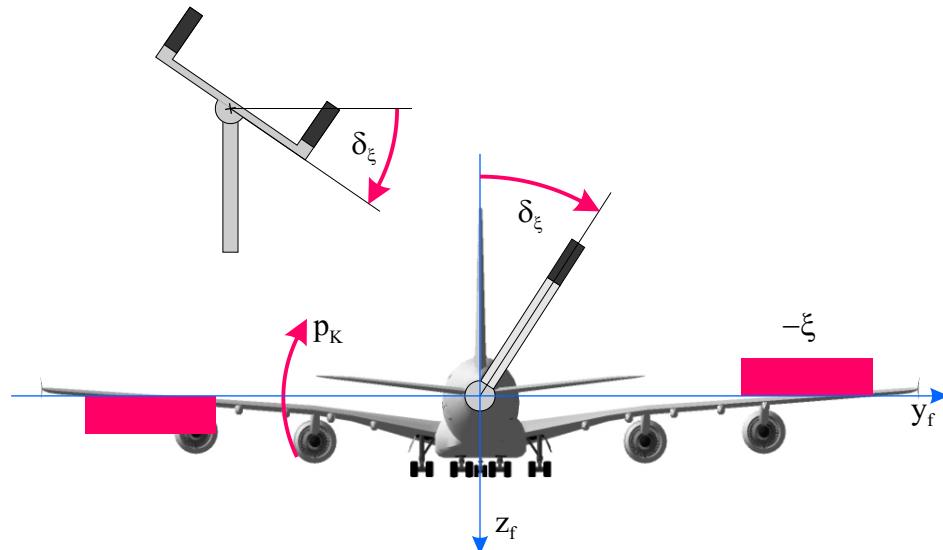


Abbildung 4.4: Ein positiver Steuerknüppelausschlag (nach rechts) führt zu einem negativen Querruderausschlag (rechtes Ruder nach oben) und dadurch zu einem positiven Rollmoment.

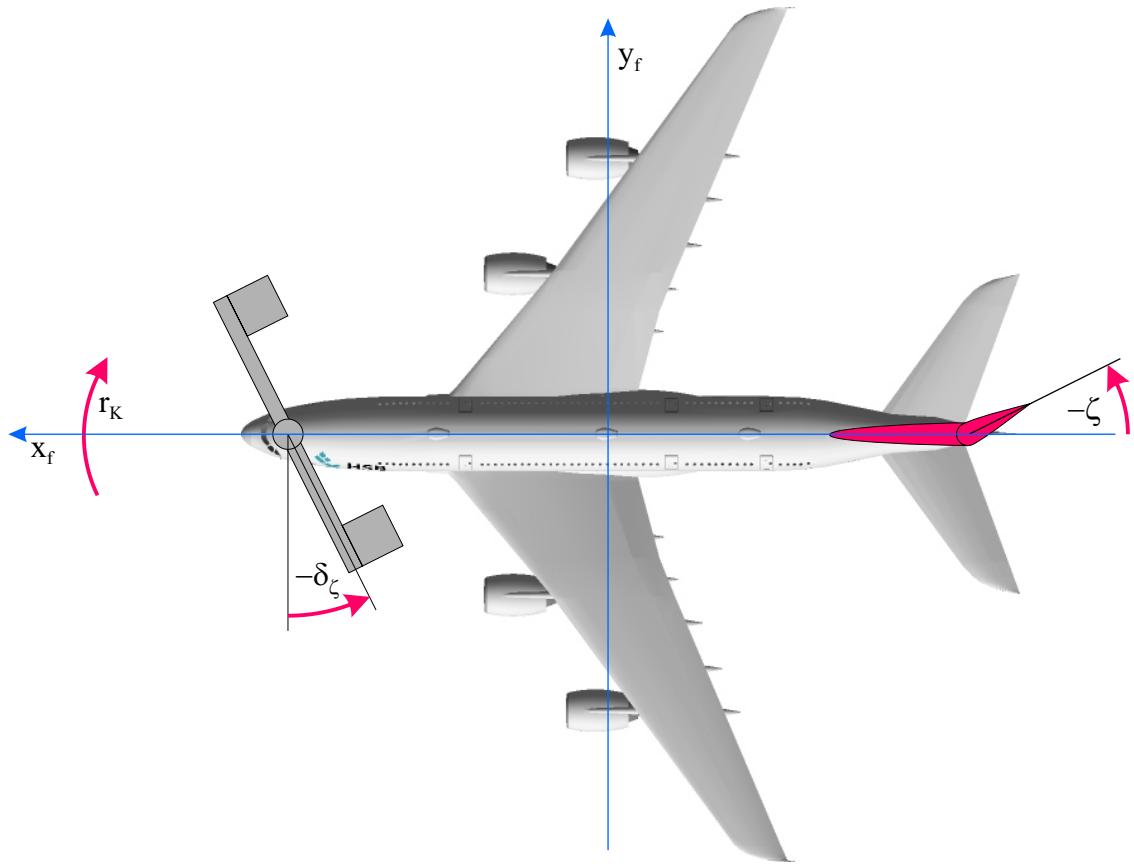


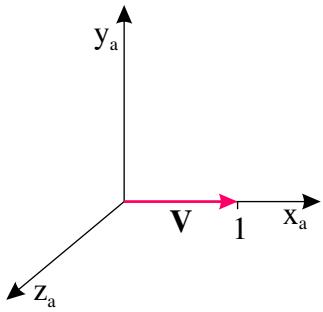
Abbildung 4.5: Ein negativer Pedalwinkel (rechtes Pedal getreten) führt zu einem negativen Seitenruderausschlag und dadurch zu einem positiven Giermoment.

4.2 Koordinatentransformation

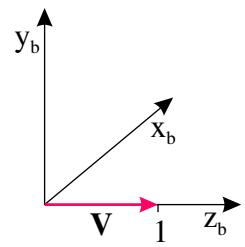
Der allgemeine dreidimensionale Vektor:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

lässt sich in jedem Koordinatensystem beschreiben.



(a) Vektor \mathbf{V} , dargestellt im a -Koordinatensystem



(b) Gleicher Vektor \mathbf{V} , dargestellt im b -Koordinaten-
system

Abbildung 4.6: Koordinatentransformation

Vektor \mathbf{V} , ausgedrückt im a -Koordinatensystem:

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das b -Koordinatensystem entsteht durch eine 90° -Drehung des a -Koordinatensystems um die y_a -Achse. Der Vektor \mathbf{V} wird dabei nicht gedreht.

Gleicher Vektor \mathbf{V} , ausgedrückt im b -Koordinatensystem:

$$\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Der Vektor hat (ausgedrückt im neuen Koordinatensystem) jetzt andere Koordinaten; es handelt sich aber immer noch um den selben Vektor.

4.2.1 Koordinatensysteme

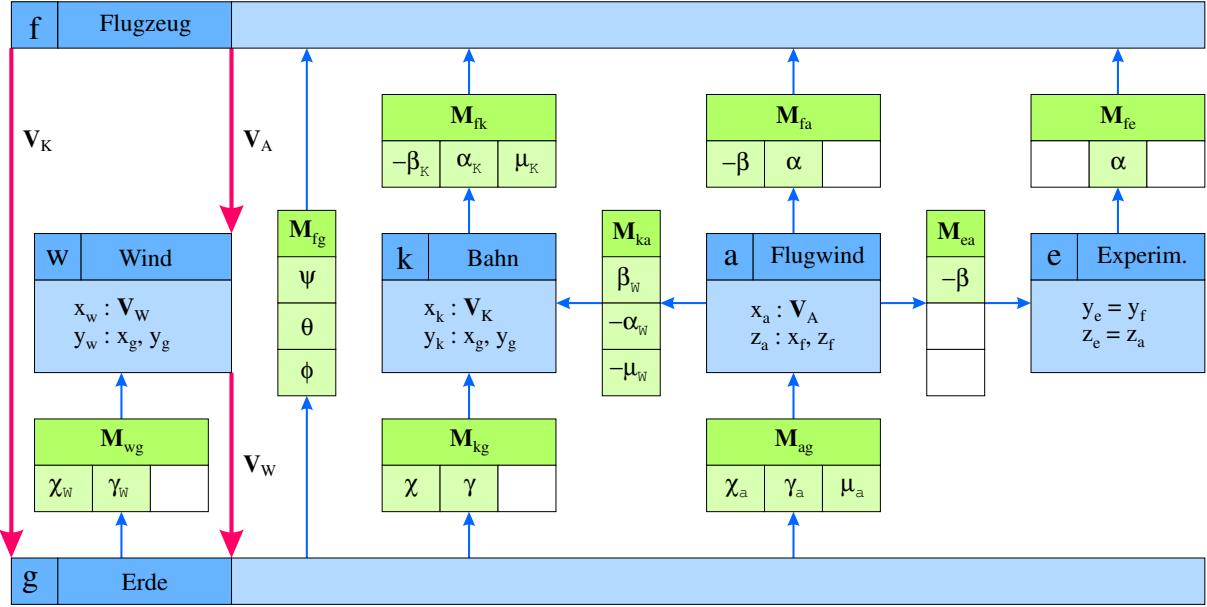


Abbildung 4.7: Koordinatensysteme (Achsenkreuze) und Transformationsmatrizen der Luftfahrt (nach [1])

- Das geodätische (erdfeste, erdlotfeste, *earth-fixed*) Koordinatensystem (Index: g) ist durch seine in Richtung der Schwerkraft zeigende z_g -Achse definiert. Die x_g -Achse liegt dann senkrecht dazu in der Erdhorizontalebene und wird häufig in Nordrichtung angenommen. Die y_g -Achse bildet (wie bei allen beschriebenen Koordinatensystemen) mit den anderen beiden Achsen ein rechtshändiges Koordinatensystem und liegt daher auch in der Erdhorizontalebene.
- Das flugzeugfeste (körperfeste, *body-fixed*) Koordinatensystem (Index: f oder kein Index) beschreibt die Lage des Flugzeugs im Raum. Die x_f -Achse zeigt dabei nach vorne (üblicherweise in der Symmetrieebene vom Schwerpunkt zur Nase des Flugzeugs), die y_f -Achse weist nach rechts (Steuerbord) und die z_f -Achse entsprechend nach unten.
- Das aerodynamische (flugwindfeste, *aerodynamic*) Koordinatensystem (Index: a) ist durch seine x_a -Achse definiert, die in die Richtung des Fluggeschwindigkeitsvektors (Anströmvektor, Flugwind) \mathbf{V}_A zeigt. Da das Koordinatensystem durch die Festlegung einer Achse noch nicht eindeutig definiert ist (es könnte ja noch um seine x_a -Achse rotieren) wird die z_a -Achse in der Fluzeugsymmetrieebene (x_f-z_f -Ebene) festgelegt. Dadurch liegt dann auch die y_f -Achse in der x_a-y_a -Ebene (vergleiche Abbildung 4.10).
- Das bahnfeste (*flight-path*) Koordinatensystem ist analog zum aerodynamischen Koordinatensystem definiert: Die x_k -Achse zeigt in die Richtung des Bahngeschwindigkeitsvektors \mathbf{V}_K . Als zusätzliche Festlegung wird die y_k -Achse üblicherweise in die Erdhorizontalebene (x_g-y_g -Ebene) gelegt (vergleiche Abbildung 4.9)

4.2.2 Drehung vom erdfesten ins flugzeugfeste Koordinatensystem

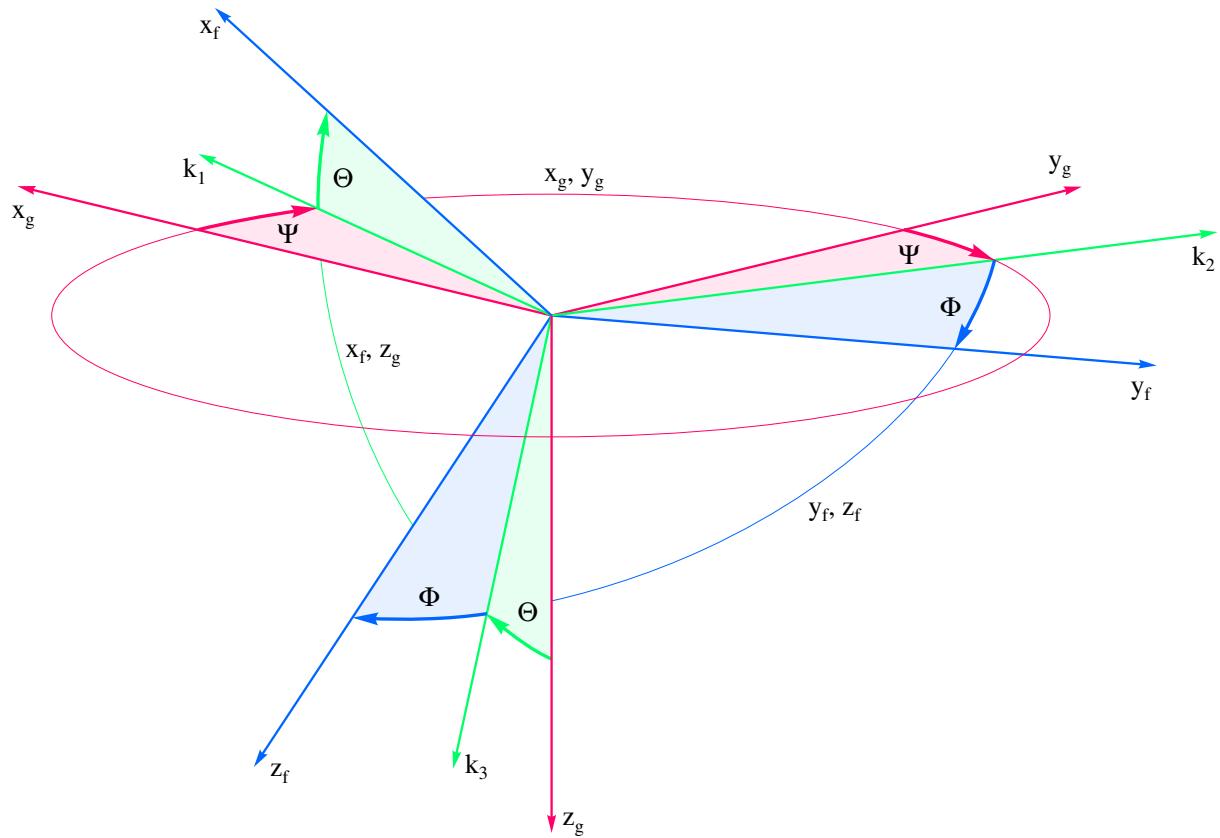


Abbildung 4.8: Eulerwinkel-Drehung vom erdfesten ins flugzeugfeste Koordinatensystem [5] (nach [1])

- Der Gierwinkel (Steuerkurs, Azimut, *heading, azimuth angle*) Ψ dreht in der x_g - y_g -Ebene um die z_g -Achse. Dabei wird die x_g -Achse in die Knotenachse k_1 und die y_g -Achse in die Knotenachse k_2 überführt. Hauptwertebereich: $-\pi < \Psi \leq \pi$
- Der Nickwinkel (Längsneigung, *pitch angle, inclination angle*) Θ dreht in der x_f - z_g -Ebene um die k_2 -Achse. Dabei wird die k_1 -Achse in die x_f -Achse und die z_g -Achse in die Knotenachse k_3 überführt. Hauptwertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$
- Der Rollwinkel (Querneigung, Hängewinkel, *bank angle*) Φ dreht in der y_f - z_f -Ebene um die x_f -Achse. Dabei wird die k_2 -Achse in die y_f -Achse und die k_3 -Achse in die z_f -Achse überführt. Hauptwertebereich: $-\pi < \Phi \leq \pi$

4.2.3 Drehung vom erdfesten ins bahnfeste Koordinatensystem

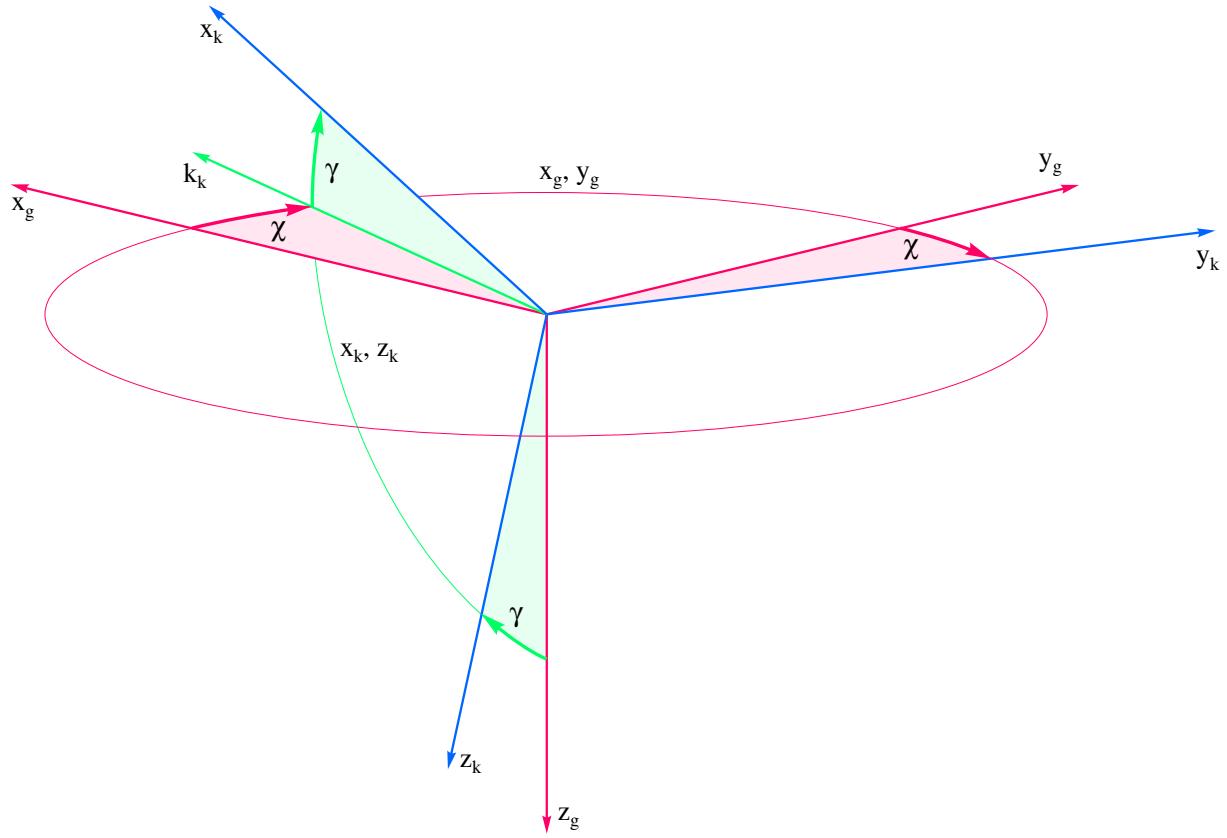


Abbildung 4.9: Drehung vom erdfesten ins bahnfeste Koordinatensystem [5]

- Der Bahnazimut (*flight-path azimuth angle*) χ dreht in der x_g - y_g -Ebene um die z_g -Achse. Dabei wird die x_g -Achse in die Knotenachse k_k und die y_g -Achse in die y_k -Achse überführt. Hauptwertebereich: $-\pi < \chi \leq \pi$
- Der Bahnwinkel (Bahnneigungswinkel, Steigwinkel, *angle of climb, flight-path inclination angle*) γ dreht in der x_k - z_k -Ebene um die y_k -Achse. Dabei wird die k_k -Achse in die x_k -Achse und die z_g -Achse in die z_k -Achse überführt. Hauptwertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$
- Eine Drehung um die x_k -Achse (wie bei den Eulerwinkeln mit Φ) findet nicht statt, da die y_k -Achse per definitionem in der Erdhorizontalebene (x_g - y_g -Ebene) liegt.

4.2.4 Drehung vom aerodynamischen ins flugzeugfeste Koordinatensystem

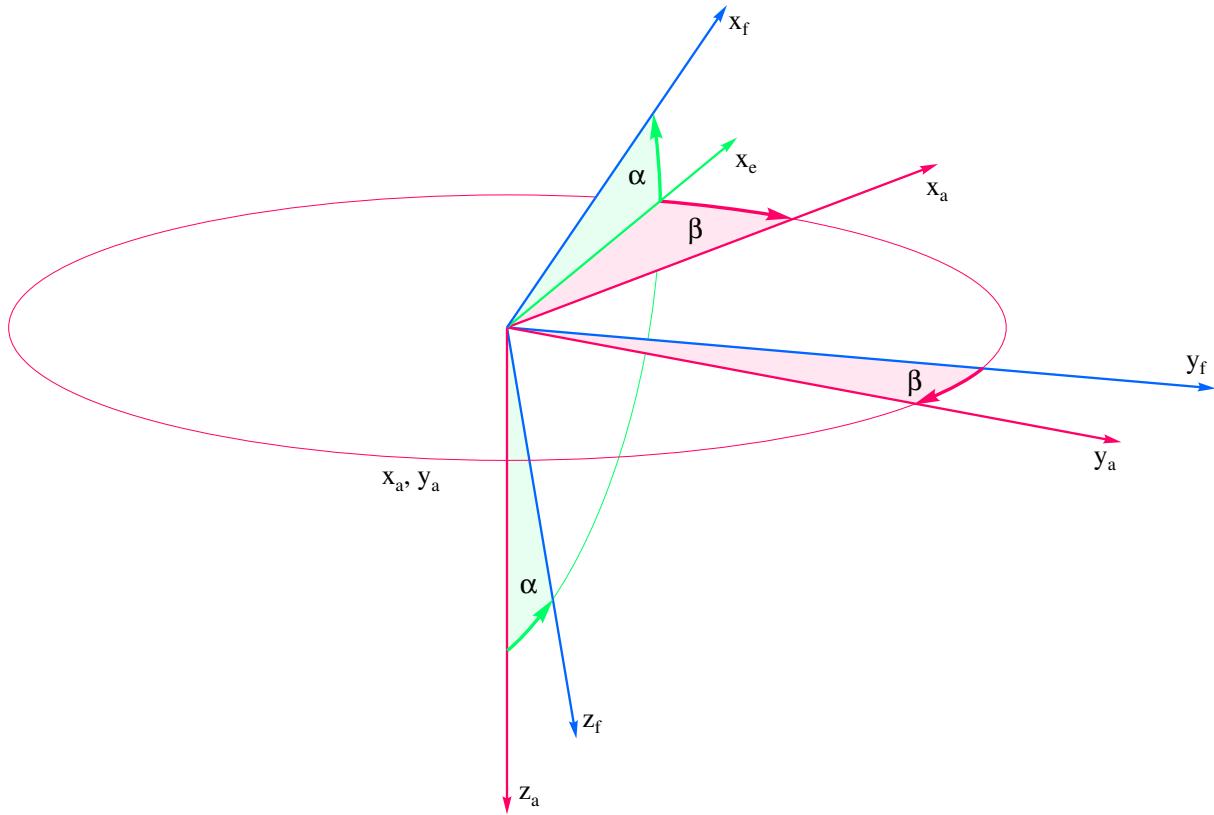


Abbildung 4.10: Drehung vom aerodynamischen ins flugzeugfeste Koordinatensystem [5]

- Der Schiebewinkel (*sideslip angle*) β dreht in der x_a - y_a -Ebene um die z_a -Achse. Durch die Drehung in mathematisch negativer Richtung, also um „Minus Beta“ wird die x_a -Achse in die Zwischenachse x_e (experimentelles Koordinatensystem) und die y_a -Achse in die y_f -Achse überführt. Hauptwertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$
- Der Anstellwinkel (*angle of attack*) α dreht in der x_f - z_f -Ebene um die y_f -Achse. Dabei wird die x_e -Achse in die x_f -Achse und die z_a -Achse in die z_f -Achse überführt. Hauptwertebereich: $-\pi < \alpha \leq \pi$
- Eine Drehung um die x_f -Achse (wie bei den Eulerwinkeln mit Φ) findet nicht statt, da die z_a -Achse per definitionem in der Flugzeugsymmetrieebene (x_f - z_f -Ebene) liegt.

4.2.5 Transformationsmatrizen

Drehung mit dem Winkel w_z um eine z -Achse:

$$\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} \cos w_z & \sin w_z & 0 \\ -\sin w_z & \cos w_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Drehung mit dem Winkel w_y um eine y -Achse:

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} \cos w_y & 0 & -\sin w_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin w_y & 0 & \cos w_y \end{bmatrix}$$

Drehung mit dem Winkel w_x um eine x -Achse:

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w_x & \sin w_x \\ 0 & -\sin w_x & \cos w_x \end{bmatrix}$$

Gesamttransformationsmatrix bei einer Drehreihenfolge $w_z \rightarrow w_y \rightarrow w_x$ („von rechts lesen“):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ges} &= \mathbf{M}_x \cdot \mathbf{M}_y \cdot \mathbf{M}_z \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w_x & \sin w_x \\ 0 & -\sin w_x & \cos w_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos w_y & 0 & -\sin w_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin w_y & 0 & \cos w_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos w_z & \sin w_z & 0 \\ -\sin w_z & \cos w_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformation vom geodätischen ins flugzeugfeste Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{fg} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformation vom aerodynamischen ins flugzeugfeste Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{fa} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & \sin(-\beta) & 0 \\ -\sin(-\beta) & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformation vom geodätischen ins bahnfeste Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{kg} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ \sin \gamma \cos \chi & \sin \gamma \sin \chi & \cos \gamma \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Transformationsrichtungsumkehr

Zwei Möglichkeiten zur Erzeugung der Umkehrtransformation (Rücktransformation):

1. Durch Umkehren der Reihenfolge der Einzeltransformationen und negative Winkel:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{gk} &= \begin{bmatrix} \cos(-\chi) & \sin(-\chi) & 0 \\ -\sin(-\chi) & \cos(-\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\gamma) & 0 & -\sin(-\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\gamma) & 0 & \cos(-\gamma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \chi \cos \gamma & -\sin \chi & \cos \chi \sin \gamma \\ \sin \chi \cos \gamma & \cos \chi & \sin \chi \sin \gamma \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. Durch Invertieren der Transformationsmatrix. Bei den verwendeten Drehtransformationsmatrizen vereinfacht sich das Invertieren auf das Transponieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{gk} &= \mathbf{M}_{kg}^{-1} = \mathbf{M}_{kg}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ \sin \gamma \cos \chi & \sin \gamma \sin \chi & \cos \gamma \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & -\sin \chi & \sin \gamma \cos \chi \\ \cos \gamma \sin \chi & \cos \chi & \sin \gamma \sin \chi \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Beispiel

Der Gewichtsvektor hat im geodätischen Koordinatensystem nur eine z-Komponente, nämlich seinen Betrag:

$$\mathbf{G}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

Nach der Transformation ins flugzeugfeste Koordinatensystem ist der Gewichtsvektor „vollbesetzt“:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_f &= \mathbf{M}_{fg} \mathbf{G}_g = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & -\sin \Theta \\ \cdots & \cdots & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cdots & \cdots & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \Theta \cdot mg \\ \sin \Phi \cos \Theta \cdot mg \\ \cos \Phi \cos \Theta \cdot mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Theta \\ \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot mg\end{aligned}$$

4.2.6 Umrechnung zwischen kartesischen und sphärischen Koordinaten

Umrechnung der Fluggeschwindigkeit

Der Fluggeschwindigkeitsvektor \mathbf{V}_A lässt sich, bedingt durch die Definition des aerodynamischen Koordinatensystems, in diesem besonders einfach ausdrücken. Er hat dort nur eine u_A -Komponente:

$$\mathbf{V}_{Aa} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} V_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nach der Transformation ins flugzeugfeste Koordinatensystem ergeben sich die Beziehungen zwischen den kartesischen und den sphärischen Koordinaten (Kugelkoordinaten) des Fluggeschwindigkeitsvektors:

$$\mathbf{V}_{Af} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix}}_{\text{kartesisch}}_f = \mathbf{M}_{fa} \mathbf{V}_{Aa} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cdots & \cdots \\ \sin \beta & \cdots & \cdots \\ \sin \alpha \cos \beta & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_A \cos \alpha \cos \beta \\ V_A \sin \beta \\ V_A \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}}_{\text{sphärisch}}$$

Überprüfen der Identität der Beträge beider Darstellungen:

$$\begin{aligned}|\mathbf{V}_A| &= \sqrt{u_{Af}^2 + v_{Af}^2 + w_{Af}^2} \\ &= \sqrt{V_A^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + V_A^2 \sin^2 \beta + V_A^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{V_A^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_1 \cos^2 \beta + V_A^2 \sin^2 \beta} \\ &= \sqrt{V_A^2 \underbrace{(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)}_1} = V_A \quad \text{q. e. d}\end{aligned}$$

Quotient zweier kartesischer Koordinaten:

$$\frac{w_{Af}}{u_{Af}} = \frac{V_A \sin \alpha \cos \beta}{V_A \cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha$$

Auflösung nach dem Anstellwinkel:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{w_{Af}}{u_{Af}} \right)$$

Zweite kartesische Koordinate:

$$v_{Af} = V_A \cdot \sin \beta$$

Auflösung nach dem Schiebewinkel:

$$\beta = \arcsin \left(\frac{v_{Af}}{V_A} \right)$$

Umrechnung der Bahngeschwindigkeit

Der Bahngeschwindigkeitsvektor \mathbf{V}_K lässt sich, bedingt durch die Definition des bahnfesten Koordinatensystems, in diesem besonders einfach ausdrücken. Er hat dort nur eine u_K -Komponente:

$$\mathbf{V}_{Kk} = \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nach der Transformation ins erdfeste Koordinatensystem ergeben sich die Beziehungen zwischen den kartesischen und den sphärischen Koordinaten (Kugelkoordinaten) des Bahngeschwindigkeitsvektors:

$$\mathbf{V}_{Kg} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix}}_{\text{kartesisch}}_g = \mathbf{M}_{gk} \mathbf{V}_{Kk} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cdots & \cdots \\ \cos \gamma \sin \chi & \cdots & \cdots \\ -\sin \gamma & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_K \cos \gamma \cos \chi \\ V_K \cos \gamma \sin \chi \\ -V_K \sin \gamma \end{bmatrix}}_{\text{sphärisch}}$$

Quotient zweier kartesischer Koordinaten:

$$\frac{v_{Kg}}{u_{Kg}} = \frac{V_K \cos \gamma \sin \chi}{V_K \cos \gamma \cos \chi} = \tan \chi$$

Auflösung nach dem Bahnazimut:

$$\chi = \arctan \left(\frac{v_{Kg}}{u_{Kg}} \right)$$

Dritte kartesische Koordinate:

$$w_{Kg} = -V_K \sin \gamma$$

Auflösung nach dem Bahnwinkel:

$$\gamma = -\arcsin \left(\frac{w_{Kg}}{V_K} \right)$$

Zusammenfassung der Umrechnungen

Sphärisch → Kartesisch:

$$\begin{aligned} u_{Af} &= V_A \cos \alpha \cos \beta \\ v_{Af} &= V_A \sin \beta \\ w_{Af} &= V_A \sin \alpha \cos \beta \\ u_{Kg} &= V_K \cos \gamma \cos \chi \\ v_{Kg} &= V_K \cos \gamma \sin \chi \\ w_{Kg} &= -V_K \sin \gamma \end{aligned}$$

Kartesisch → Sphärisch:

$$\begin{aligned} V_A &= \sqrt{u_{Af}^2 + v_{Af}^2 + w_{Af}^2} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{w_{Af}}{u_{Af}}\right) \\ \beta &= \arcsin\left(\frac{v_{Af}}{V_A}\right) \\ V_K &= \sqrt{u_{Kg}^2 + v_{Kg}^2 + w_{Kg}^2} \\ \gamma &= -\arcsin\left(\frac{w_{Kg}}{V_K}\right) \\ \chi &= \arctan\left(\frac{v_{Kg}}{u_{Kg}}\right) \end{aligned}$$

4.2.7 Darstellung der Winkel und Vektoren

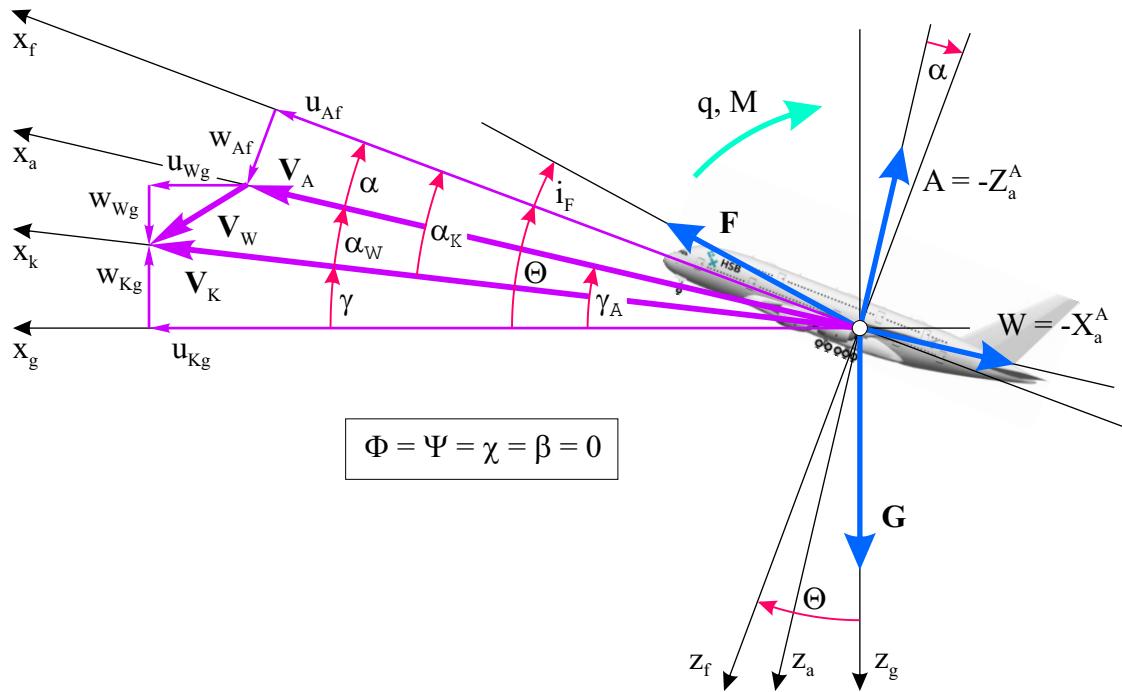


Abbildung 4.11: Winkel und Vektoren in der x - z -Ebene

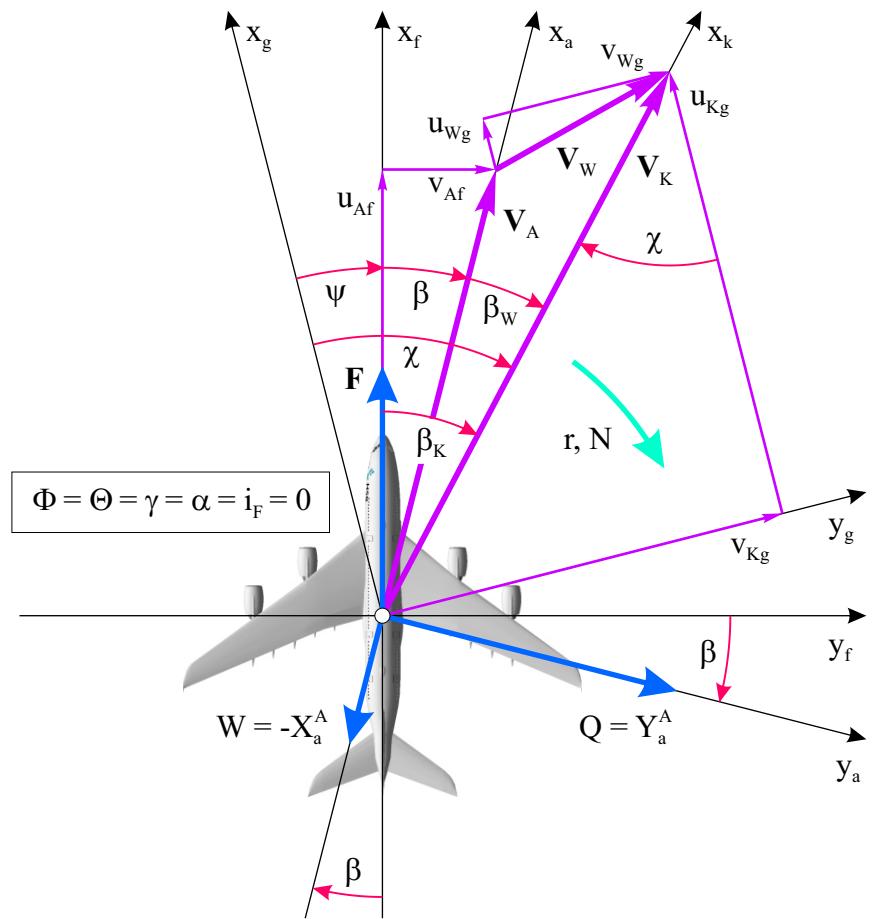


Abbildung 4.12: Winkel und Vektoren in der x - y -Ebene

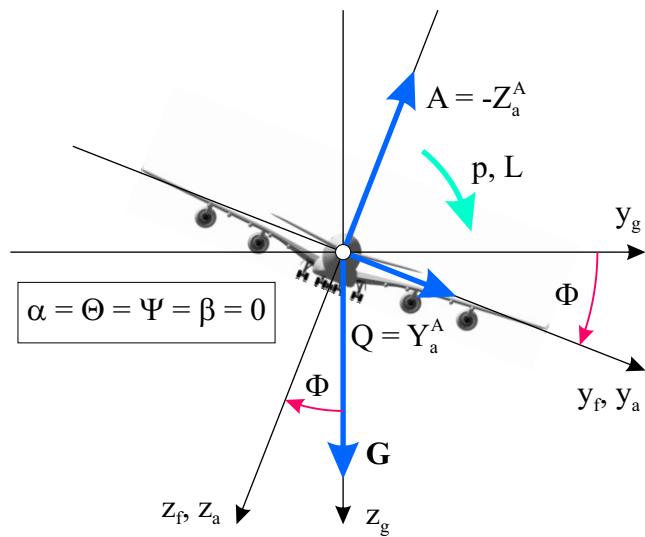


Abbildung 4.13: Winkel und Vektoren in der y - z -Ebene

Kapitel 5

Subsysteme

5.1 Aerodynamik

Die Relativgeschwindigkeit V_A zwischen dem Flugzeug und der Luft mit der Dichte ρ erzeugt einen Staudruck:

$$\bar{q} = \frac{\rho}{2} V_A^2$$

Das Produkt aus Staudruck \bar{q} und Bezugsflügelfläche S wird aerodynamische Krafteinheit E genannt:

$$E = \bar{q} \cdot S$$

Die aerodynamischen Kräfte ergeben sich als Produkt der aerodynamischen Krafteinheit mit den dimensionslosen Beiwerten:

Auftrieb:

$$A = E \cdot C_A$$

Widerstand:

$$W = E \cdot C_W$$

Querkraft:

$$Q = E \cdot C_Q$$

Für die Momente wird dimensionsbedingt zusätzlich noch eine Bezugslänge benötigt. Üblicherweise wird dazu heute bei allen Momenten die Bezugsflügeltiefe l_μ verwendet:

Rollmoment:

$$L = E \cdot l_\mu \cdot C_l$$

Nickmoment:

$$M = E \cdot l_\mu \cdot C_m$$

Giermoment:

$$N = E \cdot l_\mu \cdot C_n$$

5.1.1 Beiwerte

Die Beiwerte sind im allgemeinen nichtlineare Funktionen der jeweiligen aerodynamischen Einflussgrößen:

Beiwerte der Längsbewegung

Auftriebsbeiwert:

$$C_A = C_A(\alpha, \eta, Ma, q, \dot{\alpha}, \dots)$$

Widerstandsbeiwert:

$$C_W = C_W(\alpha, \eta, Ma, \dots)$$

Nickmomentenbeiwert:

$$C_m = C_m(\alpha, \eta, Ma, q, \dot{\alpha}, \dots)$$

Alternative Modellierung des Widerstandsbeiwertes über die Widerstandspolare:

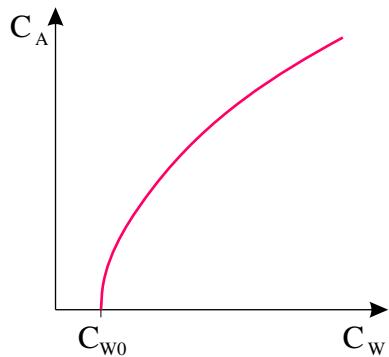


Abbildung 5.1: Widerstandspolare

Widerstandsbeiwert:

$$C_W = C_{W0} + k \cdot C_A^2$$

Dabei ist C_{W0} der Nullwiderstand (bei Auftrieb gleich null) und $k \cdot C_A^2$ ist der durch den Auftrieb induzierte Widerstand.

Beiwerthe der Seitenbewegung

Querkraftbeiwert:

$$C_Q = C_Q (\beta, p, r, \xi, \zeta, \dots)$$

Rollmomentenbeiwert:

$$C_l = C_l (\beta, p, r, \xi, \zeta, \dots)$$

Giermomentenbeiwert:

$$C_n = C_n (\beta, p, r, \xi, \zeta, \dots)$$

5.1.2 Lineare Derivativ-Aerodynamik

Ein Derivativ ist die partielle Ableitung eines Beiwertes nach einer Einflussgröße.

Beispiel: Auftriebskennlinie

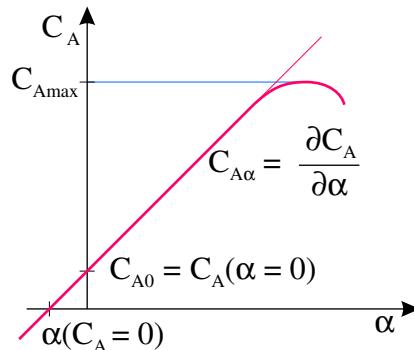


Abbildung 5.2: Auftriebskennlinie (Auftriebsbeiwert über Anstellwinkel)

Innerhalb eines Arbeitsbereiches (in der Umgebung eines Arbeitspunktes) wird eine lineare Abhangigkeit des Auftriebsbeiwertes vom Anstellwinkel angenommen. Dort ist die Steigung der Kennlinie konstant und entspricht dem Derivativ $C_{A\alpha}$:

Auftrieb aufgrund des Anstellwinkels:

$$C_{A\alpha} = \frac{\partial C_A}{\partial \alpha}$$

Analog werden weitere Auftriebsderivative definiert:

Auftrieb aufgrund des Hohenruderausschlags:

$$C_{A\eta} = \frac{\partial C_A}{\partial \eta}$$

Auftrieb aufgrund der Machzahl:

$$C_{AMa} = \frac{\partial C_A}{\partial Ma}$$

Da die Derivative (genau wie die Beiwerte) dimensionslos sind, muss eine Drehgeschwindigkeit (Einheit: s^{-1}) erst mit einer Bezugszeitkonstante dimensionslos gemacht (normiert) werden, bevor nach ihr partiell abgeleitet werden kann. Üblicherweise wird zur Normierung die Zeit

$$T_N = \frac{l_\mu}{V_A}$$

verwendet:

Normierte aerodynamische Nickgeschwindigkeit:

$$q_A^* = T_N \cdot q_A = \frac{l_\mu}{V_A} \cdot q_A$$

Das entsprechende Derivativ ergibt sich, indem nach der normierten Drehgeschwindigkeit partiell abgeleitet wird:

Auftrieb aufgrund der Nickgeschwindigkeit:

$$C_{Aq} = \frac{\partial C_A}{\partial (q_A^*)}$$

Der Gesamtauftriebsbeiwert setzt sich, im Rahmen der beschriebenen linearen Derivativ-Aerodynamik, aus der Linearkombination der Einzeleinflüsse zusammen:

Gesamtauftriebsbeiwert:

$$C_A = C_{A_0} + C_{A\alpha} \cdot \alpha + C_{A\eta} \cdot \eta + C_{AMa} \cdot Ma + C_{Aq} \cdot q_A^* + \dots$$

Entsprechendes gilt für die übrigen Kraft- und Momentenbeiwerte:

Gesamtnickmomentenbeiwert:

$$C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m\eta} \cdot \eta + C_{mMa} \cdot Ma + C_{mq} \cdot q_A^* + \dots$$

Gesamtquerkraftbeiwert:

$$C_Q = C_{Q\beta} \cdot \beta + C_{Qp} \cdot p_A^* + C_{Qr} \cdot r_A^* + C_{Q\xi} \cdot \xi + C_{Q\zeta} \cdot \zeta + \dots$$

Gesamtrollmomentenbeiwert:

$$C_l = C_{l\beta} \cdot \beta + C_{lp} \cdot p_A^* + C_{lr} \cdot r_A^* + C_{l\xi} \cdot \xi + C_{l\zeta} \cdot \zeta + \dots$$

Gesamtgiermomentenbeiwert:

$$C_n = C_{n\beta} \cdot \beta + C_{np} \cdot p_A^* + C_{nr} \cdot r_A^* + C_{n\xi} \cdot \xi + C_{n\zeta} \cdot \zeta + \dots$$

Die einzelnen Derivate werden üblicherweise nach Ihrem Ursache-Wirkungs-Zusammenhang bezeichnet:

Nickdämpfung (Dämpfung der Nickbewegung):

$$C_{mq}$$

Gierdämpfung (Dämpfung der Gierbewegung):

$$C_{nr}$$

Windfahnenstabilität (Ausrichtung „in den Wind“):

$$C_{n\beta}$$

Schieberollmoment(enderivativ) („Rollen aufgrund Schieben“):

$$C_{l\beta}$$

Gierseitenkraft(derivativ) („Querkraft aufgrund Gieren“):

$$C_{Qr}$$

usw.

5.2 Triebwerk

Schubvektor (Maximalschub) abhängig von

- Luftein- und -austrittsgeschwindigkeitsvektor (Schubeinstellwinkel, Anstellwinkel, Schiebewinkel)
- Luftdichte (Höhe)
- Machzahl ...

Tieffassverhalten:

$$T_F \cdot \dot{F} + F = F_c$$

mit

T_F Triebwerkszeitkonstante

F Schub

F_c Sollschub

Schubmoment:

$$\mathbf{Q}_F = \mathbf{r}_F \times \mathbf{F}_F = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

mit

\mathbf{F}_F Schubvektor

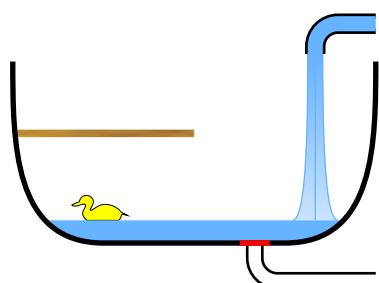
\mathbf{r}_F Schubvektorangriffspunkt (Abstand des Triebwerks vom Referenzpunkt)

\mathbf{Q}_F Schubmomentenvektor

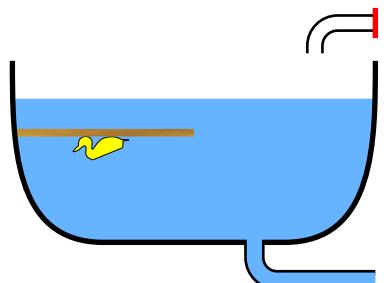
5.3 Stellerdynamik

5.3.1 Tierversuch

Nehmen Sie an, in Ihrer Badewanne wäre auf halber Höhe ein Brett angebracht, unter dem eine Kunststoffente auf dem Wasser schwimmt.



(a) Ablauf geschlossen, Zulauf geöffnet, Wasserpegel steigt, Ente steigt.



(b) Ablauf geöffnet, Zulauf geschlossen, Wasserpegel sinkt, Ente sinkt nicht.

Abbildung 5.3: Tierversuch

- Solange der Zulauf geöffnet ist, der Ablauf geschlossen und die Ente das Brett noch nicht berührt, steigt die Ente zusammen mit dem steigenden Wasserpegel.
- Sobald die Ente gegen das Brett stößt, bleibt sie in konstanter Höhe stehen. Der Wasserpegel steigt dessen ungeachtet weiter.
- Wenn nun der Zulauf geschlossen und der Ablauf geöffnet wird, beginnt der Wasserpegel zu sinken. Die Ente allerdings sinkt noch nicht.
- Erst, wenn der sinkende Wasserpegel die Ente unter dem Brett erreicht, kann diese zusammen mit dem Wasser sinken.

5.3.2 Verallgemeinerung

Badewanne Energiespeicher, Integrator, dynamisches System

Zu- bzw. Ablauf Eingangsgröße u des Integrators

Wasserpegel Energieinhalt, Zustand, Ausgangsgröße v des Integrators

Brett Begrenzung v_b der Ausgangsgröße

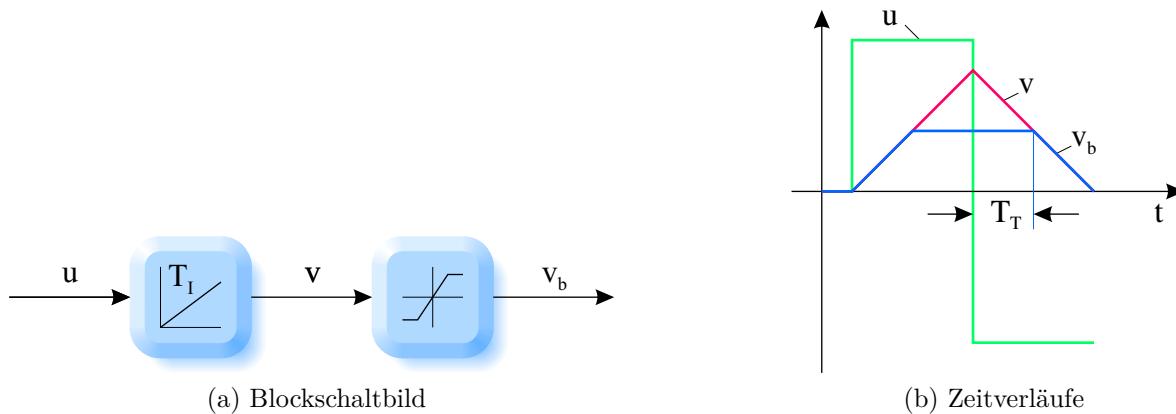


Abbildung 5.4: Nachträglich begrenzter Integrator

Problem: Wenn die Ausgangsgröße eines dynamischen Systems begrenzt wird, kann es passieren, dass die internen Zustandsgrößen „voll laufen“ und die Reaktion des Systems erst nach einer unerwünschten Totzeit T_T sichtbar wird, obwohl das begrenzte Ausgangssignal eigentlich sofort reagieren sollte.

Lösung: Zusätzliches Stoppen der entsprechenden Zustandsgrößen, wenn die Ausgangsgröße in ihre Begrenzung läuft. Im Beispiel: Stoppen des Integrators durch explizites Nullsetzen seiner Eingangsgröße: Schließen des Zulaufs.

Merke:

Niemals gedankenlos die Ausgangsgröße eines dynamischen Systems begrenzen.

5.4 Wind

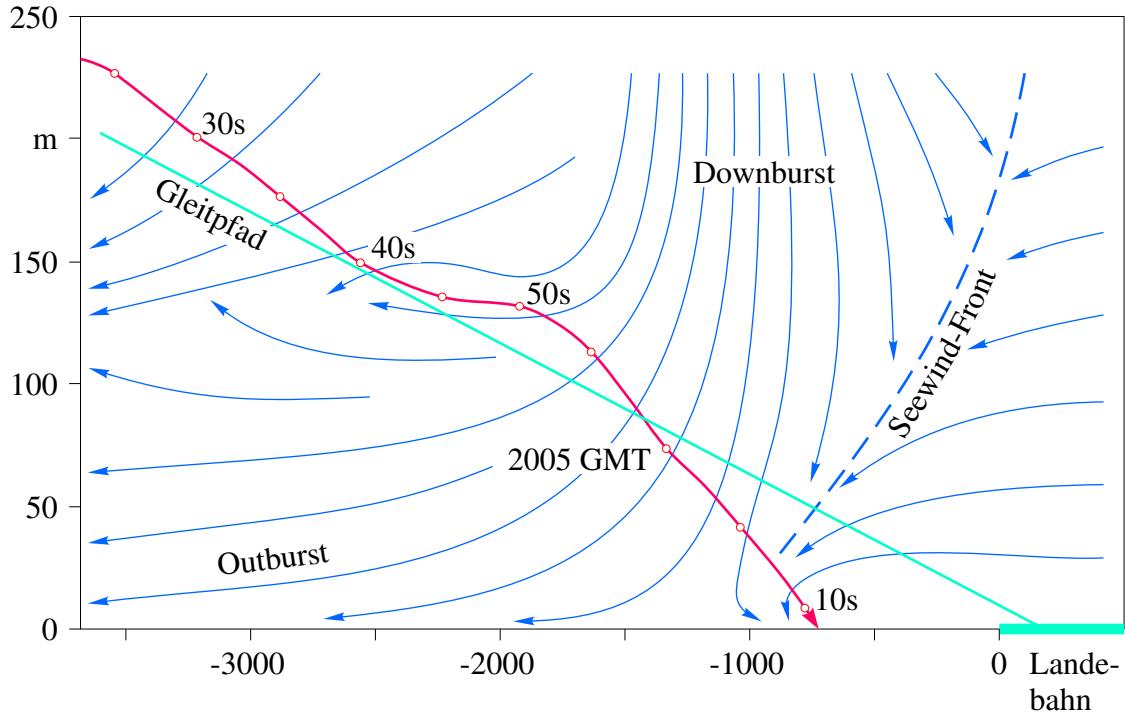


Abbildung 5.5: Verlust eines Passagierflugzeugs am Flughafen J. F. Kennedy am 24. 6. 1975

Der Gesamtwind lässt sich vereinfacht aus drei Anteilen (stationärer Wind, Turbulenzen (Böen) und Scherwind) zusammensetzen:

$$\mathbf{V}_W = \mathbf{V}_{W\ Stat} + \mathbf{V}_{W\ Turb} + \mathbf{V}_{W\ Scher}$$

5.4.1 Turbulenzen

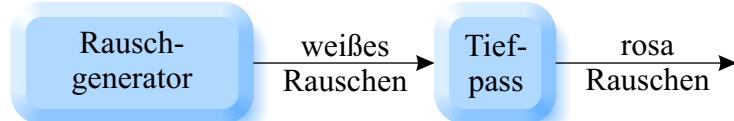


Abbildung 5.6: Weißes Rauschen: gleiche Leistungsdichte für alle Frequenzen. Rosa Rauschen: hohe Frequenzen haben geringere Leistungsdichte.

5.4.2 Windgradienten, Scherwind

Der Nabla-Operator

Nabla-Operator (Partieller Ableitungsoperator):

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T$$

Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Skalarfeld p liefert einen Vektor (den Gradienten):

Gradient:

$$\nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \text{grad}(p)$$

Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld \mathbf{V} liefert, je nach Art des Produktes, einen Skalar (Divergenz), einen Vektor (Rotation) oder eine Matrix (Jakobi-Matrix):

Divergenz (Skalarprodukt, inneres Produkt):

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = u_x + v_y + w_z = \text{div}(\mathbf{V})$$

Rotation (Kreuzprodukt):

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = \text{rot}(\mathbf{V})$$

Jakobi-Matrix (Dyadisches Produkt, äußereres Produkt):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} [u \ v \ w] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quellenfreiheit:

$$\text{div}(\mathbf{V}) = u_x + v_y + w_z = 0$$

Drehfreiheit:

$$\text{rot}(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Windgradienten

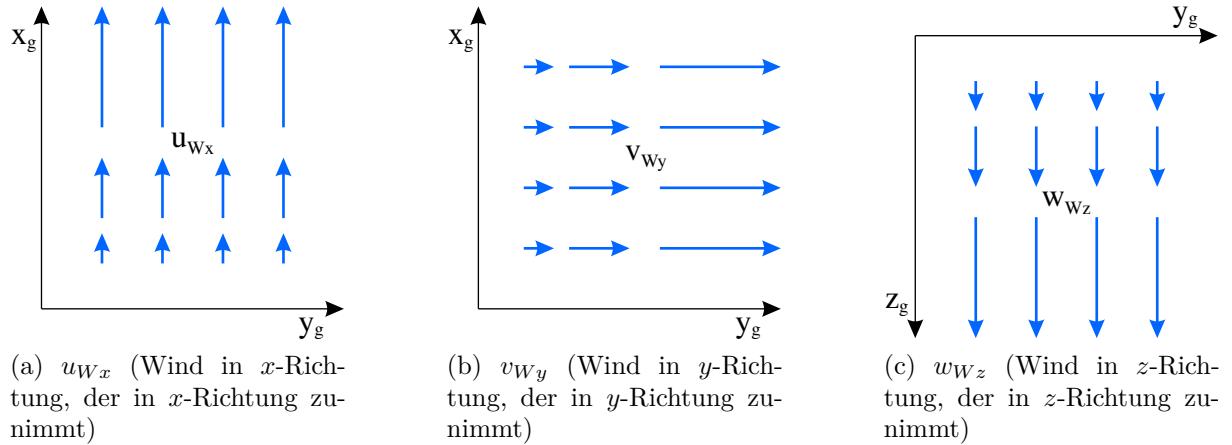


Abbildung 5.7: Windgradienten

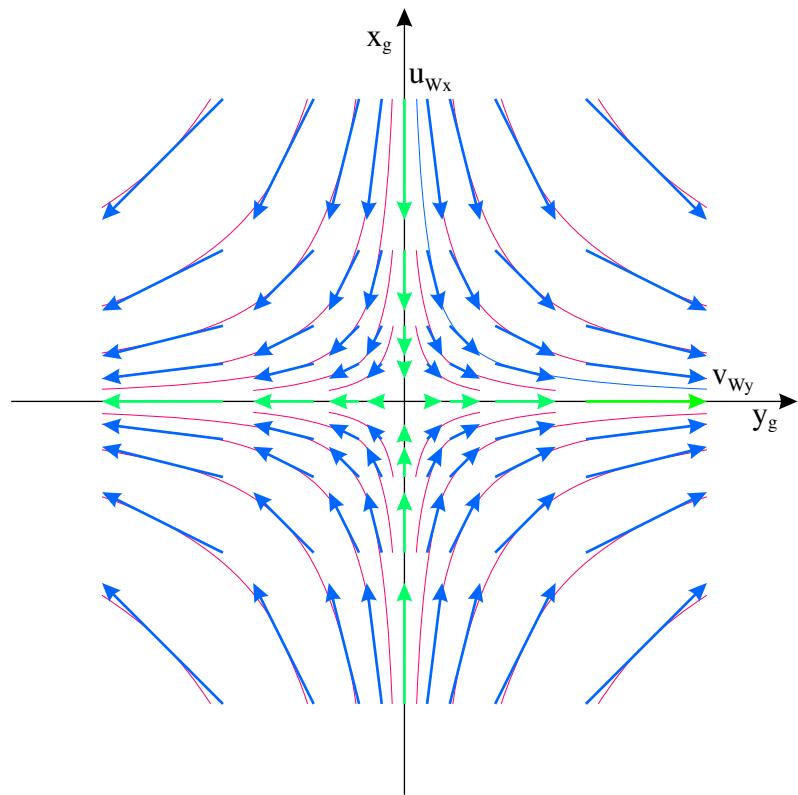


Abbildung 5.8: Horizontales, quellenfreies Windfeld ($u_{Wx} = -v_{Wy}$)

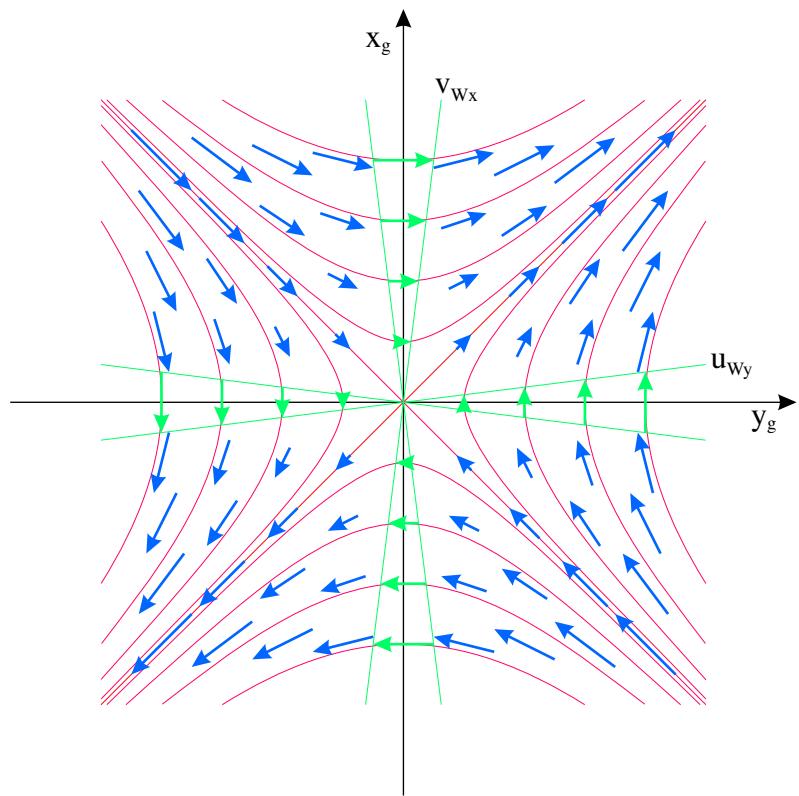


Abbildung 5.9: Horizontales, drehungsfreies Windfeld ($u_{W_y} = v_{W_x}$)

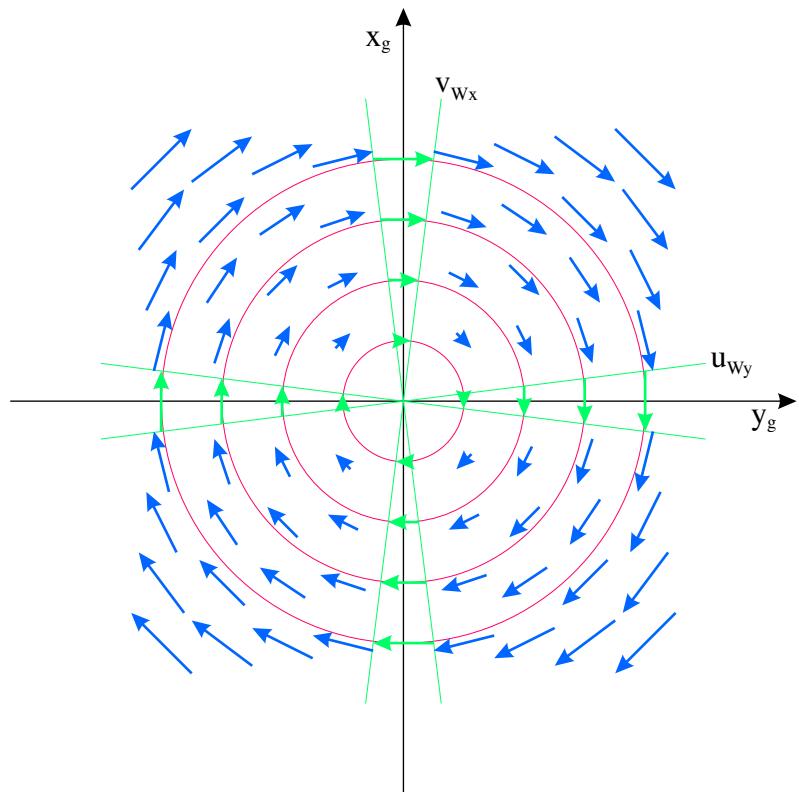


Abbildung 5.10: Horizontales, drehendes Windfeld ($u_{W_y} = -v_{W_x}$)

Beschreibung des durch Windscherungen hervorgerufenen Windanteils mittels der Jakobi-Matrix (Scherungstensor):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{W\ Scher} &= \begin{bmatrix} u_W \\ v_W \\ w_W \end{bmatrix}_{Scher} = (\nabla \cdot \mathbf{V}_W^T)^T \cdot \mathbf{s} = \begin{bmatrix} u_{Wx} & v_{Wx} & w_{Wx} \\ u_{Wy} & v_{Wy} & w_{Wy} \\ u_{Wz} & v_{Wz} & w_{Wz} \end{bmatrix}^T \mathbf{s} \\
 &= \begin{bmatrix} u_{Wx} & u_{Wy} & u_{Wz} \\ v_{Wx} & v_{Wy} & v_{Wz} \\ w_{Wx} & w_{Wy} & w_{Wz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{Wx} \cdot x + u_{Wy} \cdot y + u_{Wz} \cdot z \\ v_{Wx} \cdot x + v_{Wy} \cdot y + v_{Wz} \cdot z \\ w_{Wx} \cdot x + w_{Wy} \cdot y + w_{Wz} \cdot z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5.4.3 Flug im stationären Windfeld

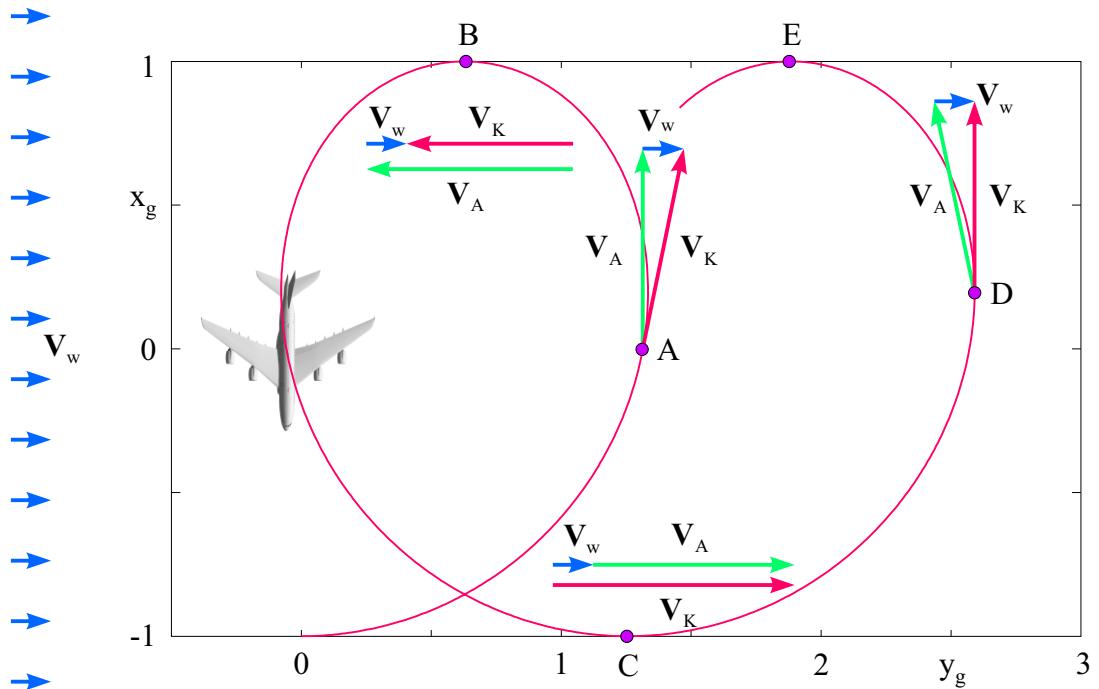


Abbildung 5.11: Flug im stationären Windfeld (Trochoide, Zykloide)

In jedem Punkt gilt:

$$\mathbf{V}_K = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_W \quad (\text{Vektorsumme})$$

Das Flugzeug fliegt gegenüber der Luft einen schiebewinkelfreien, stationären, horizontalen Kurvenflug. Alle aerodynamischen Größen (Anstellwinkel, Auftrieb, ...) sind konstant.

Der Bahngeschwindigkeitsvektor ist immer tangential zur Flugbahn ausgerichtet.

Punkt A „Umkehrpunkt“ des „Kreises“ gegenüber der Luft, bei $x_g = 0$. Der Fluggeschwindigkeitsvektor zeigt genau in x_g -Richtung.

Punkt B Das Flugzeug fliegt genau in negative y_g -Richtung, gegen den Wind. Der Betrag des Bahngeschwindigkeitsvektors ist minimal.

Punkt C Das Flugzeug fliegt genau in positive y_g -Richtung, mit dem Wind. Der Betrag des Bahngeschwindigkeitsvektors ist maximal.

Punkt D Umkehrpunkt der Trochoide gegenüber der Erde. Der Bahngeschwindigkeitsvektor zeigt genau in x_g -Richtung.

Bahngeschwindigkeit und Energie

Zwischen den Punkten B und C nimmt der Betrag des Bahngeschwindigkeitsvektors zu; das Flugzeug beschleunigt also bezogen auf die als ruhend angenommene Erde. Zwischen C und E wird das Flugzeug abgebremst.

Gegenüber der Luft fliegt das Flugzeug einen Kreis. Der Fluggeschwindigkeitsvektor dreht sich also mit der konstanten Gierwinkelableitung:

$$\mathbf{V}_{Ag} = \begin{bmatrix} V_A \sin(\dot{\Psi}t) \\ V_A \cos(\dot{\Psi}t) \end{bmatrix}$$

Der Wind kommt von Westen und hat daher nur eine y_g -Komponente:

$$\mathbf{V}_{Wg} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_W \end{bmatrix}$$

Der Bahngeschwindigkeitsvektor im erdfesten Koordinatensystem ergibt sich dann aus der Vektorsumme:

$$\mathbf{V}_{Kg} = \mathbf{V}_{Ag} + \mathbf{V}_{Wg} = \begin{bmatrix} V_A \sin(\dot{\Psi}t) \\ V_A \cos(\dot{\Psi}t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A \sin(\dot{\Psi}t) \\ V_A \cos(\dot{\Psi}t) + V_W \end{bmatrix}$$

Der Betrag der Bahngeschwindigkeit ist eine periodische Funktion der Zeit:

$$\begin{aligned} V_{Kg} &= |\mathbf{V}_{Kg}| = \sqrt{(V_A \sin(\dot{\Psi}t))^2 + (V_W + V_A \cos(\dot{\Psi}t))^2} \\ &= \sqrt{V_A^2 \sin^2(\dot{\Psi}t) + V_W^2 + 2V_W V_A \cos(\dot{\Psi}t) + V_A^2 \cos^2(\dot{\Psi}t)} \\ &= \sqrt{V_A^2 + V_W^2 + 2V_W V_A \cos(\dot{\Psi}t)} \end{aligned}$$

Wenn sich die Bahngeschwindigkeit des Flugzeugs im Verlaufe der Trochoide ändert, kann auch die kinetische Energie nicht konstant sein:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m V_{Kg}^2 \neq const.$$

Da aber die potenzielle Energie der Höhe beim horizontalen Kurvenflug konstant bleibt, muss die Energie direkt aus dem umgebenden Windfeld entnommen, bzw. an dieses abgegeben werden.

5.5 Kinetik

Die Flugzeugbewegung besitzt sechs Freiheitsgrade:

Drei **translatorische** Freiheitsgrade:

- Vorne/hinten
- Rechts/links
- Oben/unten

Drei **rotatorische** Freiheitsgrade:

- Rollen (um die x -Achse)
- Nicken (um die y -Achse)
- Gieren (um die z -Achse)

Jeder Freiheitsgrad wird durch zwei Zustände (Geschwindigkeit und Position, bzw. Drehgeschwindigkeit und Lagewinkel) beschrieben → insgesamt 12 Zustände.

Die 12 Zustände lassen sich zu vier dreidimensionalen Zustandsvektoren zusammenfassen:

Bahndrehgeschwindigkeitsvektor:

$$\boldsymbol{\Omega}_K = \begin{bmatrix} p_K \\ q_K \\ r_K \end{bmatrix}$$

Lage(drehwinkel)vektor:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix}$$

Bahngeschwindigkeitsvektor:

$$\boldsymbol{V}_K = \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix}$$

Positionsvektor:

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Die gesamte Kinetik wird dann durch ein System von vier gekoppelten, nichtlinearen Vektordifferenzialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_K &= f_{\Omega}(Q, \Omega_K) \\ \dot{\Phi} &= f_{\Phi}(\Omega_K, \Phi) \\ \dot{V}_K &= f_V(R, V_K, \Omega_K, \Phi) \\ \dot{s} &= f_s(V_K, \Phi)\end{aligned}$$

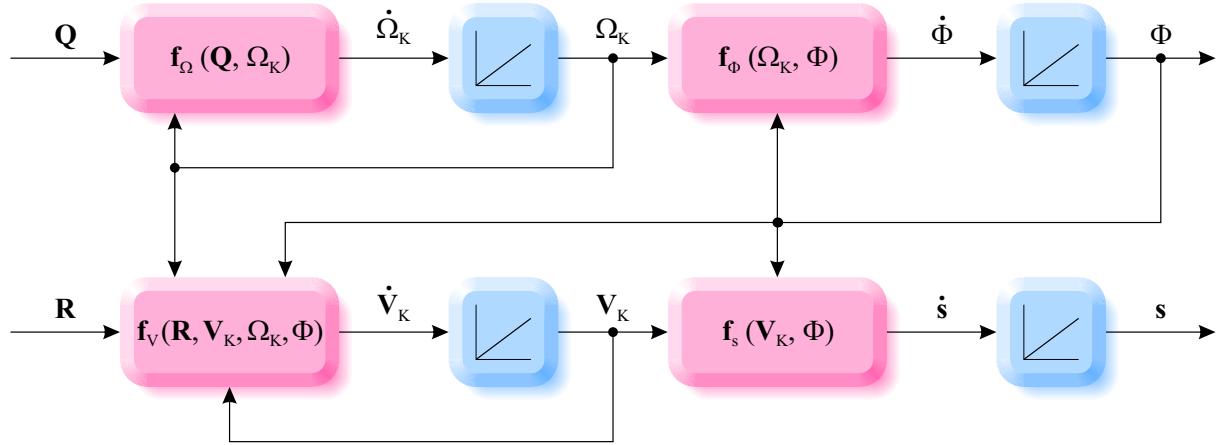


Abbildung 5.12: Allgemeine Kinetik der Flugzeugbewegung (6 Freiheitsgrade)

5.5.1 Differenzialgleichung der Position

„Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Änderung der Position“:

$$\frac{ds}{dt} = V_K$$

Ausgedrückt im erdfesten Koordinatensystem:

$$\frac{ds_g}{dt} = V_{Kg}$$

Transformation der Bahngeschwindigkeit:

$$\frac{ds_g}{dt} = M_{gf} V_{Kf}$$

Verwenden des Ableitungspunktes für die direkte Ableitung im geodätischen (inertialen) Koordinatensystem:

$$\dot{s}_g = M_{gf} V_{Kf}$$

5.5.2 Differenzialgleichung des Drehwinkels

„Die Drehgeschwindigkeit ist die zeitliche Änderung des Drehwinkels“:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Omega_K$$

Ausgedrückt im flugzeugfesten Koordinatensystem:

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_f = \Omega_{Kf}$$

Wenn jetzt alle Drehwinkel-Komponenten des Lagevektors um die flugzeugfesten Achsen drehen würden, dann würde

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_f$$

die Zeitableitungen der Eulerwinkel

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

beinhalten und die Drehwinkeldifferenzialgleichung wäre komplett. Leider aber dreht Ψ nicht um die z_f -Achse, sondern um die z_g -Achse und Θ dreht nicht um die y_f -Achse, sondern um die k_2 -Knotenachse. Die entsprechenden beiden Winkelableitungen müssen also erst einzeln in das flugzeugfeste Koordinatensystem transformiert werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_f &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Drehwinkeldifferenzialgleichung lautet dann:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \Omega_{Kf} = \begin{bmatrix} p_{Kf} \\ q_{Kf} \\ r_{Kf} \end{bmatrix}$$

Zur Auflösung nach dem Ableitungsvektor muss die Transformationsmatrix invertiert werden. Leider ist sie nicht orthogonal (weil die Eulerwinkel um Achsen drehen, die aufeinander nicht senkrecht stehen) und kann daher nicht einfach durch Transponieren invertiert werden:

$$\dot{\Phi} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi / \cos \Theta & \cos \Phi / \cos \Theta \end{bmatrix} \Omega_{Kf} = M_{\Phi f} \cdot \Omega_{Kf} \quad (5.1)$$

5.5.3 Differenzialgleichung der Bahngeschwindigkeit

Impulssatz: „Die Kraft \mathbf{R} ist die zeitliche Änderung des Impulses \mathbf{P} “:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}$$

Ausgedrückt im flugzeugfesten Koordinatensystem:

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_f = \mathbf{R}_f$$

Problem: Das flugzeugfeste Koordinatensystem, in dem die Impulsänderung

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_f$$

beschrieben wird, ist kein Inertialsystem, sondern dreht mit der Bahndrehgeschwindigkeit Ω_K gegenüber der als ruhend angenommenen Erde. Wie in Abschnitt 5.5.3 gezeigt wird, muss daher bei der inertialen Ableitung des Impulses die Drehung des flugzeugfesten Koordinatensystems im so genannten Eulerterm (Kreuzprodukt) berücksichtigt werden:

$$\dot{\mathbf{P}}_f + \Omega_{Kf} \times \mathbf{P}_f = \mathbf{R}_f$$

„Impuls ist Masse mal Geschwindigkeit“:

$$(m\mathbf{V}_{Kf}) + \Omega_{Kf} \times (m\mathbf{V}_{Kf}) = \mathbf{R}_f$$

Produktregel der Differenziation:

$$\dot{m}\mathbf{V}_{Kf} + m\dot{\mathbf{V}}_{Kf} + \Omega_{Kf} \times (m\mathbf{V}_{Kf}) = \mathbf{R}_f$$

Vernachlässigung der Massenänderung:

$$m\dot{\mathbf{V}}_{Kf} + \Omega_{Kf} \times (m\mathbf{V}_{Kf}) = \mathbf{R}_f$$

Ausklammer der konstanten, skalaren Masse:

$$m(\dot{\mathbf{V}}_{Kf} + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_{Kf}) = \mathbf{R}_f$$

Gesamtkraft aus Triebwerk, Aerodynamik und Gewicht:

$$m(\dot{\mathbf{V}}_{Kf} + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_{Kf}) = \mathbf{R}_f^F + \mathbf{R}_f^A + \mathbf{G}_f$$

Transformation von Gewicht und Luftkraft:

$$m(\dot{\mathbf{V}}_{Kf} + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_{Kf}) = \mathbf{R}_f^F + M_{fa}\mathbf{R}_a^A + M_{fg}\mathbf{G}_g$$

Auflösen nach der Ableitung:

$$\dot{\mathbf{V}}_{Kf} = \frac{1}{m} (\mathbf{R}_f^F + M_{fa}\mathbf{R}_a^A + M_{fg}\mathbf{G}_g) - \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_{Kf}$$

„Herauskürzen“ der Masse aus dem Gewicht:

$$\dot{\mathbf{V}}_{Kf} = \frac{1}{m} (\mathbf{R}_f^F + M_{fa}\mathbf{R}_a^A) + M_{fg}\mathbf{g}_g - \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_{Kf}$$

Ableitung eines Vektors in einem drehenden Koordinatensystem

Im Folgenden wird das geodätische Koordinatensystem als inertiales (ruhendes, raumfestes) Koordinatensystem aufgefasst und das flugzeugfeste Koordinatensystem als Beispiel für ein nicht inertiales (drehendes) Koordinatensystem verwendet.

Die inertielle Ableitung (hochgestellter Index g) eines Vektors \mathbf{V} , ausgedrückt im flugzeugfesten Koordinatensystem (tiefgestellter Index f) ergibt sich, indem der Vektor aus dem flugzeugfesten Koordinatensystem ins geodätische Koordinatensystem transformiert wird, dort inertial abgeleitet und dann wieder ins flugzeugfeste Koordinatensystem zurücktransformiert wird:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^g = \mathbf{M}_{fg} \frac{d(\mathbf{M}_{gf}\mathbf{V}_f)}{dt}$$

Produktregel:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^g = \mathbf{M}_{fg} \left(\mathbf{M}_{gf} \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^f + \frac{d(\mathbf{M}_{gf})}{dt} \mathbf{V}_f \right)$$

Ausmultiplizieren:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^g = \mathbf{M}_{fg} \mathbf{M}_{gf} \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^f + \mathbf{M}_{fg} \frac{d(\mathbf{M}_{gf})}{dt} \mathbf{V}_f$$

Matrizen zusammenfassen und Punkte verwenden:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^g = \dot{\mathbf{V}}_f + \mathbf{M}_{fg} \dot{\mathbf{M}}_{gf} \mathbf{V}_f$$

Dabei ist

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^f = \dot{\mathbf{V}}_f$$

die direkt im flugzeugfesten Koordinatensystem komponentenweise durchgeföhrte Ableitung des Vektors, wiederum ausgedrückt im flugzeugfesten Koordinatensystem. Die Zeitableitung der Transformationsmatrix

$$\frac{d(\mathbf{M}_{gf})}{dt} = \dot{\mathbf{M}}_{gf}$$

wird ebenfalls einzeln für jedes Element der Matrix durchgeführt.

In einer etwas länglicheren Herleitung (Matlab-Datei:

https://m-server.fk5.hs-bremen.de/rtfr/skript/euler_term mlx) lässt sich das die Euler-Winkelableitungen beinhaltende Matrizenprodukt

$$\mathbf{M}_{fg} \dot{\mathbf{M}}_{gf}$$

zu einem Kreuzprodukt mit dem Vektor der flugzeugfesten Bahndrehgeschwindigkeit zusammenfassen:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^g = \dot{\mathbf{V}}_f + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_f$$

Das Kreuzprodukt $\boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_f$ wird manchmal als „Euler-Term“ bezeichnet.

Beispiel: Horizontaler (gefesselter) Kurvenflug (ohne Hängen, ohne Schieben)

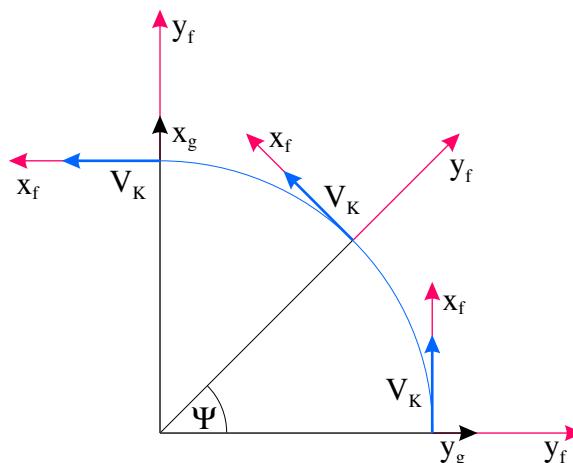


Abbildung 5.13: Drehung des flugzeugfesten Koordinatensystems und des Bahngeschwindigkeitsvektors bei horizontalem Kurvenflug

Da sich der Bahngeschwindigkeitsvektor \mathbf{V}_K (tangential zur Flugbahn) beim horizontalen, hänge- und schiebefreien Kurvenflug zusammen mit dem Flugzeug (und damit auch mit dem flugzeugfesten Koordinatensystem) dreht, zeigt er immer in x_f -Richtung.

Er ist daher, wenn er im flugzeugfesten Koordinatensystem ausgedrückt wird, konstant:

$$\mathbf{V}_{Kf} = \begin{bmatrix} u_{Kf} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ergo verschwindet die direkt im flugzeugfesten Koordinatensystem komponentenweise durchgeführte Ableitung:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_K}{dt} \right)_f = \dot{\mathbf{V}}_{Kf} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da die Flugbahn in der Erdhorizontalebene liegt, kann der Drehgeschwindigkeitsvektor nur eine z -Komponente besitzen. Diese ist gleich der zeitlichen Änderung des Gierwinkels in negativer Drehrichtung:

$$\boldsymbol{\Omega}_{Kf} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

Die vollständige inertiale Geschwindigkeitsableitung lautet dann:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_f^g = \dot{\mathbf{V}}_f + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\Psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{Kf} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\Psi} \cdot u_{Kf} \end{bmatrix}$$

Der Term $-\dot{\Psi} \cdot u_{Kf}$ entspricht dabei, physikalisch richtig, genau der Zentripetalbeschleunigung, die in negativer y_f -Richtung wirkt und das Flugzeug auf seiner Kreisbahn hält.

5.5.4 Differenzialgleichung der Bahndrehgeschwindigkeit

Die Herleitung der Drehgeschwindigkeitsdifferenzialgleichung erfolgt analog zu der Herleitung der Geschwindigkeitsdifferenzialgleichung. Es sind lediglich die Kräfte durch die Momente, der Impuls durch den Drehimpuls (Drall), die Geschwindigkeit durch die Drehgeschwindigkeit und die skalare Masse durch den Tensor der Trägheitsmomente zu ersetzen:

Drehimpulssatz: „Das Moment \mathbf{Q} ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses \mathbf{D} “:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{Q}$$

Ausgedrückt im flugzeugfesten Koordinatensystem:

$$\left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} \right)_f = \mathbf{Q}_f$$

Inertiale Ableitung:

$$\dot{\mathbf{D}}_f + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times \mathbf{D}_f = \mathbf{Q}_f$$

„Drehimpuls ist Trägheitstensor mal Drehgeschwindigkeit“:

$$(\mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\Omega}_{Kf}) \dot{=} \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times (\mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\Omega}_{Kf}) = \mathbf{Q}_f$$

Konstanter Trägheitstensor:

$$\mathbf{I}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Kf} + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times (\mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\Omega}_{Kf}) = \mathbf{Q}_f$$

Gesamtmoment aus Triebwerk und Aerodynamik:

$$\mathbf{I}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Kf} + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times (\mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\Omega}_{Kf}) = \mathbf{Q}_f^F + \mathbf{Q}_f^A$$

Transformation des aerodynamischen Moments:

$$\mathbf{I}_f \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Kf} + \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times (\mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\Omega}_{Kf}) = \mathbf{Q}_f^F + M_{fa} \mathbf{Q}_a^A$$

Auflösen nach der Ableitung:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{Kf} = \mathbf{I}_f^{-1} \cdot \left(\mathbf{Q}_f^F + M_{fa} \mathbf{Q}_a^A - \boldsymbol{\Omega}_{Kf} \times (\mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\Omega}_{Kf}) \right)$$

Der Trägheitstensor kann - als Matrix - leider nicht aus dem Kreuzprodukt ausgeklammert werden. Aus dem gleichen Grund berechnet sich sein Kehrwert durch reguläre Matrizeninversion.

Der Trägheitstensor

Der Trägheitstensor beschreibt, analog zu der Masse bei translatorischen Bewegungen, die Trägheit, mit der sich das System einer Drehbewegungsänderung widersetzt. Während aber die Masse als skalare Größe in allen translatorischen Richtungen gleich groß ist, unterscheiden sich die Drehträgheiten je nach betrachteter Drehachse.

Im flugzeugfesten Koordinatensystem lautet der (symmetrische) Trägheitstensor:

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} I_{xf} & -I_{xyf} & -I_{xzf} \\ -I_{xyf} & I_{yf} & -I_{yzf} \\ -I_{xzf} & -I_{yzf} & I_{zf} \end{bmatrix}$$

Auf seiner Hauptdiagonale befinden sich die Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned} I_{xf} &= \int (y_f^2 + z_f^2) \cdot dm \\ I_{yf} &= \int (x_f^2 + z_f^2) \cdot dm \\ I_{zf} &= \int (x_f^2 + y_f^2) \cdot dm \end{aligned}$$

Ein Trägheitsmoment stellt, anschaulich interpretiert, also die Summe (Integral) aller infinitesimal kleinen Masseteilchen multipliziert mit dem Quadrat ihres jeweiligen Hebelarms (pythagoräischer Abstand von der entsprechenden Drehachse) dar.

Die Nicht-Diagonalelemente des Trägheitstensors heißen Deviationsmomente:

$$\begin{aligned} I_{xyf} &= \int (x_f \cdot y_f) \cdot dm \\ I_{xzf} &= \int (x_f \cdot z_f) \cdot dm \\ I_{yzf} &= \int (y_f \cdot z_f) \cdot dm \end{aligned}$$

Bei einem Deviationsmoment werden die Masseteilchen formal mit jeweils zwei Hebelarmen (Positionskoordinaten) multipliziert, was zur Folge hat, dass bei symmetrischen Flugzeugen I_{xyf} und I_{yzf} verschwinden. Wenn nämlich bei einem Flugzeug die x_f - z_f -Ebene eine Symmetrieebene darstellt, bedeutet dies, dass es für jedes Masseteilchen auf der rechten Seite der Symmetrieebene ein entsprechendes (identisches) Masseteilchen auf der linken Seite gibt. Beide unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen ihrer y_f -Koordinate (rechts positiv, links negativ), sodass das Integral (die Summe) immer dann verschwindet, wenn der Integrand einen y_f -Faktor beinhaltet:

Symmetrisches Flugzeug:

$$I_{xyf} = I_{yzf} = 0$$

Der Trägheitstensor beinhaltet dann neben den Trägheitsmomenten nur noch das Deviationsmoment I_{xzf} :

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} I_{xf} & 0 & -I_{xzf} \\ 0 & I_{yf} & 0 \\ -I_{xzf} & 0 & I_{zf} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Werden die flugzeugfesten Achsen in Richtung der Hauptträgheitsachsen definiert, dann (und nur dann) verschwindet auch das letzte Deviationsmoment:

$$I_{xzf} = 0$$

Wirkung der Deviationsmomente Überträgt man das zweite Newton'sche Axiom

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

auf die Drehbewegung, so wird aus der Kraft \mathbf{F} das Moment \mathbf{Q} , aus der Beschleunigung \mathbf{a} die Drehbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ und aus der skalaren Masse m der Trägheitstensor \mathbf{I} :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}$$

Die Auflösung nach der Drehbeschleunigung lautet dann:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{Q} \quad (5.3)$$

Die Inversion des Trägheitstensors lässt sich noch relativ übersichtlich analytisch durchführen. Die Inverse einer Matrix kann bekanntermaßen aus dem Quotienten ihrer Adjunktentenmatrix und ihrer Determinante berechnet werden:

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{I}|} \cdot \mathbf{I}_{adj}$$

Unter Verwendung von Gleichung (5.2) ergibt sich dann (wobei der Index f aus Übersichtlichkeitsgründen weg gelassen wurde):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{I_x I_y I_z - I_{xz}^2 I_y} \begin{bmatrix} I_y I_z & 0 & I_{xz} I_y \\ 0 & I_x I_z - I_{xz}^2 & 0 \\ I_{xz} I_y & 0 & I_x I_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} & 0 & \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} & 0 & \frac{I_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wird nun dieser inverse Trägheitstensor benutzt, um in Gleichung (5.3) den Zusammenhang zwischen Drehbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ und Drehmoment \mathbf{Q} herzustellen

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \\ \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} & 0 & \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} & 0 & \frac{I_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

so zeigt die erste Zeile

$$\dot{p} = \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} L + \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} N$$

dass eine Rollbeschleunigung \dot{p} nicht nur durch ein Rollmoment L erzeugt wird, sondern dass auch ein Giermoment N über das Deviationsmoment I_{xz} zur Gesamtrollbeschleunigung beiträgt. Andersherum argumentiert bewirkt ein reines Giermoment also nicht nur eine Gierbeschleunigung sondern eben auch eine parasitäre Rollbeschleunigung.

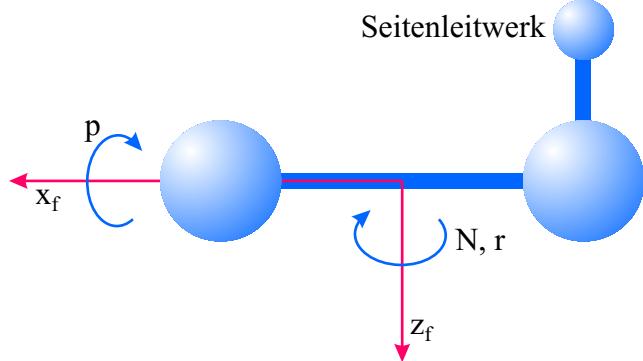


Abbildung 5.14: Bei einem reinen Giermoment reagiert das Flugzeug (zusätzlich zur Gierbeschleunigung) wegen des „Zurückbleibens“ des Seitenleitwerks auch mit einer Rollbeschleunigung.

5.6 Quaternionen

Die nicht orthogonale Transformationsmatrix in der Lagedifferenzialgleichung (5.1) beinhaltet die Quotienten

$$\sin \Phi \tan \Theta = \frac{\sin \Phi \sin \Theta}{\cos \Theta}, \quad \cos \Phi \tan \Theta = \frac{\cos \Phi \sin \Theta}{\cos \Theta}, \quad \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta}, \quad \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta}$$

deren Nenner für einen Längsneigungswinkel Θ von $\pm \frac{\pi}{2}$ verschwindet. Wenn zusätzlich der Hängewinkel Φ ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ beträgt, wird der entsprechende Quotient unbestimmt ($\frac{0}{0}$), ansonsten nehmen die Quotienten unendlich große Werte an. Eine Simulation bricht in allen Fällen mit einer Fehlermeldung ab.

Physikalisch-anschaulich äußert sich das Unbestimmtheitsproblem beispielsweise bei einem senkrecht nach unten ausgerichteten Flugzeug ($\Theta = -\frac{\pi}{2}$) durch das Zusammenfallen der erdfesten z - und der flugzeugfesten x -Achse. Sowohl ein „Gieren“ mit $\dot{\Psi}$ um die z_g -Achse als auch ein Rollen mit $\dot{\phi}$ um die x_f -Achse führen jetzt zur gleichen Bewegung um die senkrechte Flugzeuglängsachse (Gimbal Lock).

Zur Lösung des Problems kann man in der Lagedifferenzialgleichung als Zustandsgrößen statt der drei Lagewinkel $[\Phi \Theta \Psi]$ die vier Komponenten einer Quaternion $[a b c d]$ verwenden.

5.6.1 Eigenschaften der Quaternionen

Quaternionen sind – ähnlich wie die komplexen Zahlen – eine Erweiterung der reellen Zahlen. Während eine komplexe Zahl z aus einem Realteil a und einem **skalaren** Imaginärteil b besteht: $z = a + b \cdot i$, besitzt eine Quaternion Z einen Realteil a und einen **vektoriellen**

Imaginärteil $[b \ c \ d]$, dessen Komponenten jeweils mit ihrer eigenen imaginären Einheit i , j und k multipliziert werden:

$$Z = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$$

Die imaginären Einheiten sind wie bei den komplexen Zahlen definiert:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Zusätzlich ergibt das Produkt zweier unterschiedlicher imaginärer Einheiten die dritte und es ist anti-kommutativ (Vorzeichenwechsel bei Reihenfolgevertauschung):

$$\begin{array}{lll} i \cdot j = k & j \cdot k = i & k \cdot i = j \\ j \cdot i = -k & k \cdot j = -i & i \cdot k = -j \end{array}$$

Die Summe zweier Quaternionen berechnet sich komponentenweise

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i + (c_1 + c_2) j + (d_1 + d_2) k \end{aligned}$$

während beim Quaternionenprodukt die Vorzeichen der Produkte der imaginären Einheiten berücksichtigt werden müssen:

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k \end{aligned}$$

Die konjugierte Quaternion \bar{Z} ergibt sich – wie bei den komplexen Zahlen – durch ein negatives Vorzeichen vor dem Imaginärteil:

$$\bar{Z} = \overline{a + bi + cj + dk} = a - (bi + cj + dk) = a - bi - cj - dk \quad (5.4)$$

Das Produkt einer Quaternion mit ihrer Konjugierten ist rein reell

$$\begin{aligned} Z \cdot \bar{Z} &= (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) \\ &= (aa + bb + cc + dd) \\ &\quad + (-ab + ba - cd + dc) i \\ &\quad + (-ac + bd + ca - db) j \\ &\quad + (-ad - bc + cb + da) k \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

und entspricht dem Betragsquadrat $|Z|^2$ der Quaternion:

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Jede Quaternion mit einer Länge ungleich null lässt sich mittels Division durch ihren Betrag in ihre Einheitsquaternion überführen:

$$Z^0 = \frac{Z}{|Z|} = \frac{a}{|Z|} + \frac{b}{|Z|}\mathbf{i} + \frac{c}{|Z|}\mathbf{j} + \frac{d}{|Z|}\mathbf{k} \quad (5.5)$$

5.6.2 Berechnung der Quaternion aus dem Drehwinkel und der Drehachse

In Gleichung (4.1) ist die Transformationsmatrix \mathbf{M}_{fg} definiert, die aus trigonometrischen Funktionen der Eulerwinkel Φ , Θ und Ψ besteht und die einen Vektor $\mathbf{v} = [x \ y \ z]^T$ vom erdfesten (Index g) ins flugzeugfeste (Index f) Koordinatensystem transformiert:

$$\begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Die gleiche Transformation kann nun auch mit einer Quaternion realisiert werden.

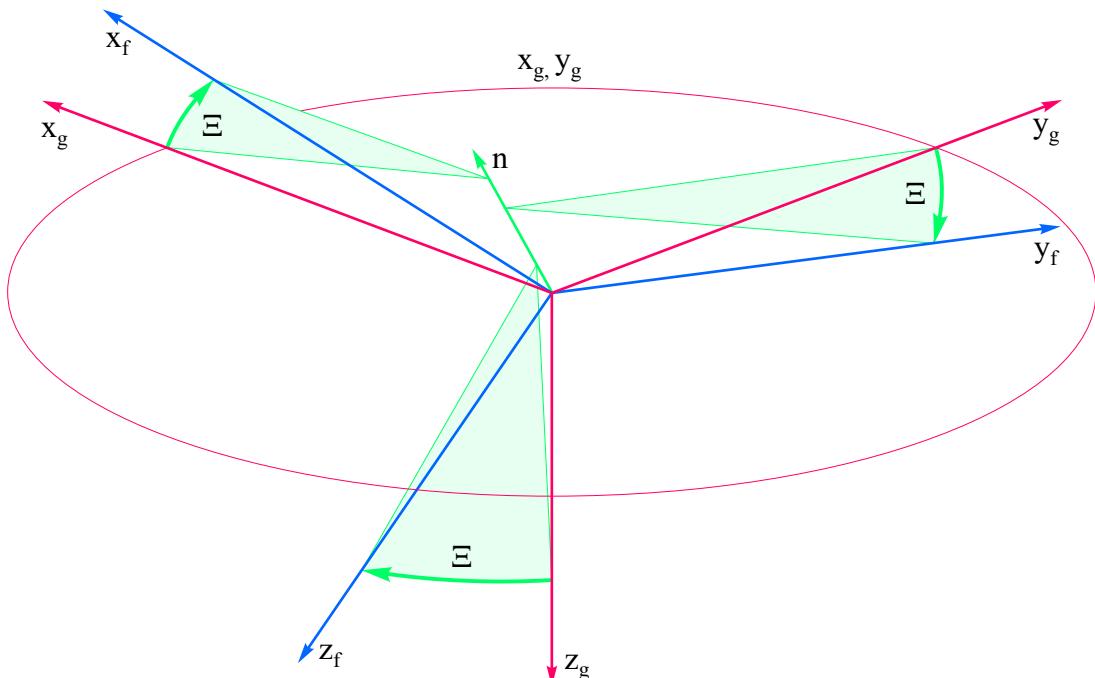


Abbildung 5.15: Gesamtdrehung vom erdfesten ins flugzeugfeste Koordinatensystem mit dem Winkel Ξ um die Drehachse \mathbf{n}

Dazu werden die in Abbildung 4.8 dargestellten drei Einzeldrehungen mit Ψ , Θ und Φ , die nötig sind, um das erdfeste in das flugzeugfeste Koordinatensystem zu überführen, zu der in Abbildung 5.15 veranschaulichten Gesamtdrehung mit dem Winkel Ξ um die Drehachse $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ zusammengefasst. (Die Drehachse hat dabei in beiden Koordinatensystemen die gleichen Koordinaten, da sich das flugzeugfeste Koordinatensystem ja genau um die Drehachse herum dreht und sich die Koordinaten der Drehachse dabei nicht verändern.) Unter der Voraussetzung, dass der Drehachsenvektor \mathbf{n} ein Einheitsvektor ist (also seine Länge gemäß Gleichung (5.5) auf eins normiert wurde), lässt sich aus Drehwinkel und Drehachse die zugehörige Einheitsquaternion Z_D aufbauen:

$$\begin{aligned} Z_D &= a + bi + cj + dk \\ &= \cos\left(\frac{\Xi}{2}\right) + n_x \cdot \sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)i + n_y \cdot \sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)j + n_z \cdot \sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)k \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.6.3 Berechnung des Drehwinkels und der Drehachse aus der Quaternion

Bei gegebener Quaternion $Z_D = a + bi + cj + dk$ berechnen sich der zugehörige Drehwinkel Ξ und die Drehachse $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ direkt aus Gleichung (5.7). Der Realteil der Quaternion liefert den Drehwinkel:

$$a = \cos\left(\frac{\Xi}{2}\right) \Rightarrow \Xi = 2 \arccos(a)$$

Mit dem gerade berechneten Drehwinkel ergibt sich die Drehachse dann aus dem Imaginärteil der Quaternion:

$$\begin{aligned} bi + cj + dk &= n_x \cdot \sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)i + n_y \cdot \sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)j + n_z \cdot \sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)k \\ \Rightarrow \mathbf{n} &= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{\sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)} \\ \frac{c}{\sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)} \\ \frac{d}{\sin\left(\frac{\Xi}{2}\right)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.6.4 Berechnung der Eulerwinkel aus der Transformationsmatrix

Aus einzelnen Elementen der Transformationsmatrix in Gleichung (5.6) ergeben sich Gleichungen, um die Eulerwinkel zu berechnen:

$$M_{13} = -\sin \Theta \quad (5.8)$$

$$M_{11} = \cos \Theta \cos \Psi \quad (5.9)$$

$$M_{12} = \cos \Theta \sin \Psi \quad (5.10)$$

$$M_{23} = \sin \Phi \cos \Theta \quad (5.11)$$

$$M_{33} = \cos \Phi \cos \Theta \quad (5.12)$$

Der Längsneigungswinkel folgt direkt aus Gleichung (5.8):

$$-\sin \Theta = M_{13} \Rightarrow \Theta = -\arcsin M_{13} \quad (5.13)$$

Aus dem Quotienten der Gleichungen (5.10) und (5.9) berechnet sich der Azimut

$$\frac{\cos \Theta \sin \Psi}{\cos \Theta \cos \Psi} = \tan \Psi = \frac{M_{12}}{M_{11}} \Rightarrow \Psi = \arctan \left(\frac{M_{12}}{M_{11}} \right) \quad (5.14)$$

und der Quotient der Gleichungen (5.11) und (5.12) führt zum Hängewinkel:

$$\frac{\sin \Phi \cos \Theta}{\cos \Phi \cos \Theta} = \tan \Phi = \frac{M_{23}}{M_{33}} \Rightarrow \Phi = \arctan \left(\frac{M_{23}}{M_{33}} \right) \quad (5.15)$$

Um bei der programmtechnischen Umsetzung für Ψ und Φ den vollen Winkelbereich ($-\pi \dots \pi$) zu erhalten, muss die in den meisten Programmiersprachen vorhandene `atan2`-Funktion verwendet werden, die auch mit den Singularitäten umgehen kann, die bei einem „normalen“ Arkustangens auftreten, wenn die Nenner der Gleichungen (5.14) oder (5.15) verschwinden, weil ein Winkel $\frac{\pi}{2}$ beträgt. In manchen Veröffentlichungen wird vorgeschlagen, nach der Berechnung des Längsneigungswinkels gemäß Gleichung (5.13), diesen in die Gleichungen (5.9) - (5.12) einzusetzen, um mit `arcsin`- oder `arccos`-Funktionen Ψ und Φ zu berechnen. Auf diese Weise würden Ψ und Φ allerdings fälschlicherweise auf die Wertebereiche ($-\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}$) bzw. ($0 \dots \pi$) eingeschränkt, da `arcsin` und `arccos` nur in diesen Bereichen Werte liefern.

5.6.5 Berechnung der Transformationsmatrix aus der Quaternion

Die konjugierte Quaternion $\overline{Z_D}$ zu der in Gleichung (5.7) definierten Quaternion lautet nach Gleichung (5.4):

$$\overline{Z_D} = a - bi - cj - dk$$

Auch der zu transformierende Vektor $\mathbf{v}_g = [x_g \ y_g \ z_g]^T$ wird in Form einer Quaternion Z_g dargestellt:

$$Z_g = 0 + x_g \mathbf{i} + y_g \mathbf{j} + z_g \mathbf{k}$$

Die zu Gleichung (5.6) analoge Transformation ins flugzeugfeste Koordinatensystem geschieht dann mittels zweier Quaternionenprodukte

$$\begin{aligned}
Z_f &= \overline{Z_D} \cdot Z_g \cdot Z_D \\
&= (a - bi - cj - dk) \cdot (0 + x_g i + y_g j + z_g k) \cdot (a + bi + cj + dk) \\
&= 0 \\
&\quad + \left((a^2 + b^2 - c^2 - d^2) x_g + 2(bc + ad) y_g + 2(bd - ac) z_g \right) i \\
&\quad + \left(2(bc - ad) x_g + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) y_g + 2(cd + ab) z_g \right) j \\
&\quad + \left(2(bd + ac) x_g + 2(cd - ab) y_g + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) z_g \right) k
\end{aligned} \tag{5.16}$$

wobei die Quaternion

$$Z_f = 0 + x_f i + y_f j + z_f k$$

die Komponenten des transformierten Vektors $\mathbf{v}_f = [x_f \ y_f \ z_f]^T$ beinhaltet. Gleichung (5.16) kann übersichtlicher in Matrixschreibweise dargestellt werden

$$\begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2(bc + ad) & 2(bd - ac) \\ 2(bc - ad) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd + ab) \\ 2(bd + ac) & 2(cd - ab) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

sodass die Transformationsmatrix direkt aus den Quaternionenkomponenten berechnet werden kann:

$$\mathbf{M}_{fg} = \begin{bmatrix} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2(bc + ad) & 2(bd - ac) \\ 2(bc - ad) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd + ab) \\ 2(bd + ac) & 2(cd - ab) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Wenn in einer Simulation die Eulerwinkel nicht explizit benötigt werden, kann die aus den Komponenten der Quaternion aufgebaute Transformationsmatrix \mathbf{M}_{fg} aus Gleichung (5.18) direkt in den Differenzialgleichungen der Bahngeschwindigkeit und der Position verwendet werden, sodass dann keine trigonometrischen Funktionen der Eulerwinkel berechnet werden müssen und sich der Rechenaufwand verringert.

5.6.6 Berechnung der Eulerwinkel aus der Quaternion

Durch das Einsetzen der entsprechenden Elemente der Transformationsmatrix aus Gleichung (5.18) in die Gleichungen (5.13) - (5.15) berechnen sich die Eulerwinkel direkt aus den Quaternionenkomponenten:

$$\Theta = -\arcsin M_{13} = -\arcsin(2(bd - ac)) = \arcsin(2(ac - bd)) \tag{5.19}$$

$$\Psi = \arctan\left(\frac{M_{12}}{M_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{2(bc + ad)}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}\right) \tag{5.20}$$

$$\varPhi = \arctan\left(\frac{M_{23}}{M_{33}}\right) = \arctan\left(\frac{2(cd+ab)}{a^2-b^2-c^2+d^2}\right) \quad (5.21)$$

Natürlich muss bei einer numerischen Umsetzung der Gleichungen (5.19) - (5.21) auch hier die `atan2`-Funktion verwendet werden.

5.6.7 Berechnung der Quaternion aus den Eulerwinkeln

Die in Gleichung (5.16) dargestellte Transformation vom geodätschen ins flugzeugfeste Koordinatensystem mit Hilfe der Gesamtquaternion Z_D lässt sich auch von innen nach außen aus den drei Einzelquaternonen Z_Ψ , Z_Θ und Z_Φ aufbauen:

$$\begin{aligned} Z_f &= \overline{Z_\Phi} \cdot (\overline{Z_\Theta} \cdot (\overline{Z_\Psi} \cdot Z_g \cdot Z_\Psi) \cdot Z_\Theta) \cdot Z_\Phi \\ &= (\overline{Z_\Phi} \cdot \overline{Z_\Theta} \cdot \overline{Z_\Psi}) \cdot Z_g \cdot (Z_\Psi \cdot Z_\Theta \cdot Z_\Phi) \\ &= \underbrace{(\overline{Z_\Psi} \cdot \overline{Z_\Theta} \cdot \overline{Z_\Phi})}_{Z_D} \cdot Z_g \cdot \underbrace{(Z_\Psi \cdot Z_\Theta \cdot Z_\Phi)}_{Z_D} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dabei wird das bei Quaternionen geltende Assoziativgesetz beachtet und die Tatsache berücksichtigt, dass die Konjugierte eines Quaternionenproduktes gleich dem Produkt der einzelnen Konjugierten in umgekehrter Reihenfolge ist.

Die Einzelquaternionen werden entsprechend Gleichung (5.7) aus den jeweiligen Drehwinkel (Ψ , Θ und Φ) und den zugehörigen Drehachsen ($\mathbf{n}_\Psi = [0 \ 0 \ 1]^T$, ...) aufgebaut:

$$\begin{aligned} Z_\Psi &= \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) + 0 \cdot \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) i + 0 \cdot \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) j + 1 \cdot \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) k \\ &= \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) k \\ Z_\Theta &= \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) + 0 \cdot \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) i + 1 \cdot \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) j + 0 \cdot \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) k \\ &= \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) j \\ Z_\Phi &= \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + 1 \cdot \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) i + 0 \cdot \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) j + 0 \cdot \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) k \\ &= \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) i \end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (5.22) ergibt sich die Gesamtquaternion Z_D in Abhängigkeit von den Eulerwinkeln dann als:

$$\begin{aligned}
Z_D &= Z_\Psi \cdot Z_\Theta \cdot Z_\Phi \\
&= \left(\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) k \right) \left(\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) j \right) \left(\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) i \right) \\
&= \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \\
&\quad + \left(\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right) i \\
&\quad + \left(\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right) j \\
&\quad + \left(\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right) k
\end{aligned} \tag{5.23}$$

5.6.8 Berechnung der Quaternion aus der Transformationsmatrix

Der pragmatische Weg, mit den bislang vorgestellten Werkzeugen die Quaternion aus der Transformationsmatrix zu berechnen, würde zuerst die Eulerwinkel aus der Transformationsmatrix und dann die Quaternion aus den Eulerwinkeln ermitteln. Da dabei aber die bekannten Probleme der Eulerwinkel (rechenzeitintensive trigonometrische Funktionen, „gimbal lock“, vgl. Abschnitt 5.6) auftreten, wird im Folgenden eine direkte Alternative erläutert.

Gleichung (5.18) stellt die Transformationsmatrix M_{fg} in Abhängigkeit von den Quaternionenkomponenten a, b, c und d dar. Zur Berechnung der ersten Quaternionenkomponente a werden die Hauptdiagonalelemente der Transformationsmatrix aufsummiert:

$$\begin{aligned}
M_{11} + M_{22} + M_{33} &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \\
&= 3a^2 - b^2 - c^2 - d^2
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Die Bedingung, dass die Quaternion einen Betrag von eins besitzt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

lässt sich nach b^2 auflösen

$$b^2 = 1 - a^2 - c^2 - d^2$$

und in Gleichung (5.24) einsetzen

$$M_{11} + M_{22} + M_{33} = 3a^2 - (1 - a^2 - c^2 - d^2) - c^2 - d^2 = 4a^2 - 1 \tag{5.25}$$

sodass Gleichung (5.25) nach der gesuchten Quaternionenkomponente aufgelöst werden kann:

$$a = \frac{\sqrt{M_{11} + M_{22} + M_{33} + 1}}{2} \quad (5.26)$$

Geschickt gewählte Differenzen zweier Matrixelemente

$$M_{23} - M_{32} = 2(cd + ab) - 2(cd - ab) = 4ab$$

liefern jeweils eine Bestimmungsgleichung für die verbleibenden Quaternionenkomponenten:

$$b = \frac{M_{23} - M_{32}}{4a} \quad c = \frac{M_{31} - M_{13}}{4a} \quad d = \frac{M_{12} - M_{21}}{4a} \quad (5.27)$$

Leider gibt es bei der Berechnung der Quaternion gemäß Gleichung (5.26) - (5.27) das Problem, dass die Quaternionenkomponente a , die in Gleichung (5.27) in allen Nennern auftritt, null werden kann, sodass die anderen Komponenten nicht mehr berechenbar sind. Die Komponente a , die sich nach Gleichung (5.23) aus

$$a = \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)$$

ergibt, verschwindet beispielsweise, wenn ein Eulerwinkel den Wert 0 und ein anderer den Wert π besitzt, da dann sowohl ein Kosinus als auch ein Sinus und damit beide Summanden null werden. In diesem Fall kann die Berechnung mit der zweiten Quaternionenkomponente b beginnen, indem die Diagonalelemente der Transformationsmatrix mit anderen Vorzeichen addiert werden

$$\begin{aligned} M_{11} - M_{22} - M_{33} &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \\ &= -a^2 + 3b^2 - c^2 - d^2 \end{aligned}$$

sodass sich unter Verwendung von

$$a^2 = 1 - b^2 - c^2 - d^2$$

eine Bestimmungsgleichung für b ergibt:

$$\begin{aligned} M_{11} - M_{22} - M_{33} &= -(1 - b^2 - c^2 - d^2) + 3b^2 - c^2 - d^2 = 4b^2 - 1 \\ \Rightarrow b &= \frac{\sqrt{M_{11} - M_{22} - M_{33} + 1}}{2} \end{aligned}$$

Mit b können dann auch die übrigen Komponenten ermittelt werden:

$$c = \frac{M_{12} + M_{21}}{4b} \quad d = \frac{M_{13} + M_{31}}{4b} \quad a = \frac{M_{23} - M_{32}}{4b}$$

Insgesamt gibt es vier Sätze von Bestimmungsgleichungen, je nachdem, mit welchen Diagonalelementvorzeichen und damit welcher Quaternionenkomponente begonnen wird:

$$\begin{array}{llll} a = \frac{\sqrt{M_{11} + M_{22} + M_{33} + 1}}{2} & b = \frac{M_{23} - M_{32}}{4a} & c = \frac{M_{31} - M_{13}}{4a} & d = \frac{M_{12} - M_{21}}{4a} \\ b = \frac{\sqrt{M_{11} - M_{22} - M_{33} + 1}}{2} & c = \frac{M_{12} + M_{21}}{4b} & d = \frac{M_{13} + M_{31}}{4b} & a = \frac{M_{23} - M_{32}}{4b} \\ c = \frac{\sqrt{-M_{11} + M_{22} - M_{33} + 1}}{2} & d = \frac{M_{23} + M_{32}}{4c} & a = \frac{M_{31} - M_{13}}{4c} & b = \frac{M_{12} + M_{21}}{4c} \\ d = \frac{\sqrt{-M_{11} - M_{22} + M_{33} + 1}}{2} & a = \frac{M_{12} - M_{21}}{4d} & b = \frac{M_{13} + M_{31}}{4d} & c = \frac{M_{23} + M_{32}}{4d} \end{array}$$

Da es sich bei der zu berechnenden Quaternion um eine Einheitsquaternion handelt, muss mindestens eine ihrer Komponenten signifikant von null verschieden sein, sodass mit dieser begonnen werden kann. In der numerischen Praxis kann einfach nach dem größten Radikanten $\pm M_{11} \pm M_{22} \pm M_{33} + 1$ gesucht werden, um zu entscheiden, welcher Satz von Bestimmungsgleichungen verwendet wird.

5.6.9 Differenzialgleichung der Quaternionen

Unter der wichtigen Annahme, dass die Quaternion $Z = a + bi + cj + dk$ eine Einheitsquaternion ist, lässt sich die Lagedifferenzialgleichung (5.1) durch die sehr kompakte Quaternionendifferenzialgleichung ersetzen:

$$\dot{Z} = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot Z_\Omega \quad (5.28)$$

Dabei ist Z_Ω eine reine Quaternion (mit verschwindendem Realteil), deren Imaginärteil aus den drei Elementen p_{Kf} , q_{Kf} und r_{Kf} des flugzeugfesten Bahndrehgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\Omega}_{Kf}$ besteht:

$$Z_\Omega = 0 + p_{Kf}\mathbf{i} + q_{Kf}\mathbf{j} + r_{Kf}\mathbf{k}$$

Auf der rechten Seite der Quaternionendifferenzialgleichung (5.28) kann das Quaternionenprodukt ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{1}{2} \cdot Z \cdot Z_\Omega \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a + bi + cj + dk) \cdot (0 + p_{Kf}\mathbf{i} + q_{Kf}\mathbf{j} + r_{Kf}\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{ (-p_{Kf} \cdot b - q_{Kf} \cdot c - r_{Kf} \cdot d) \\ &\quad + (p_{Kf} \cdot a + r_{Kf} \cdot c - q_{Kf} \cdot d) \mathbf{i} \\ &\quad + (q_{Kf} \cdot a - r_{Kf} \cdot b + p_{Kf} \cdot d) \mathbf{j} \\ &\quad + (r_{Kf} \cdot a + q_{Kf} \cdot b - p_{Kf} \cdot c) \mathbf{k} \} \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.6.10 Numerische Simulation

Häufig - beispielsweise für die numerische Simulation - wird Gleichung (5.29) in Matrixschreibweise dargestellt, indem die Quaternion $Z = a + bi + cj + dk$ in Form eines reellen Spaltenvektors $\mathbf{Z} = [a \ b \ c \ d]^T$ und die rechte Seite von Gleichung (5.29) als Matrix-Vektor-Produkt ausgedrückt wird:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \\ \dot{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p_{Kf} & -q_{Kf} & -r_{Kf} \\ p_{Kf} & 0 & r_{Kf} & -q_{Kf} \\ q_{Kf} & -r_{Kf} & 0 & p_{Kf} \\ r_{Kf} & q_{Kf} & -p_{Kf} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{Z} \quad (5.30)$$

Während einer längeren Simulation können unvermeidliche numerische Fehler dazu führen, dass die Voraussetzung für Gleichung (5.30), nämlich die Tatsache, dass es sich bei \mathbf{Z} um eine Einheitsquaternion handelt, nicht mehr erfüllt ist. Um diesen Fehler möglichst klein zu halten, bietet sich eine einfache Proportionalregelung an. Der Regelfehler $\Delta Z = 1 - |\mathbf{Z}|$, also die Abweichung des Quaternionenbetrags von eins, wird dabei mit dem aktuellen Zustand \mathbf{Z} skaliert und über einen P-Regler mit dem Verstärkungsfaktor K auf alle Komponenten des Quaternionenintegrators zurückgeführt. Die erweiterte Gleichung (5.30) lautet dann:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{Z} + K \cdot \Delta Z \cdot \mathbf{Z} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{Z} + K(1 - |\mathbf{Z}|) \mathbf{Z} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{Z} + K \left(1 - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right) \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Um Rechenzeit zu sparen, kann der Betrag in Gleichung (5.31) durch das Betragsquadrat ersetzt werden, ohne das Regelverhalten qualitativ zu verändern:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{Z} + K \left(1 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\right) \mathbf{Z} \quad (5.32)$$

Wie bei jeder Reglerauslegung muss für die Reglerverstärkung K ein Kompromiss gefunden werden. Ist K zu klein, kann der Quaternionenbetrag signifikant von eins abweichen, während ein zu großes K zu einer Versteifung des zu simulierenden Systems führt, mit der Folge von längeren Rechenzeiten und der Gefahr von numerischer Instabilität.

Das vorgestellte Verfahren zur Wahrung der Quaternioneneinheitslänge hat den Vorteil, dass es dabei nicht nötig ist, die Quaternion – die ja Bestandteil des Zustandsvektors der Simulation ist – direkt ändern zu müssen. Wenn die Simulationsumgebung allerdings das direkte Setzen von Zustandsgrößen ohne größeren Aufwand gestattet, kann auch einfach nach jedem Integrationsschritt die Quaternion mittels Division durch ihren Betrag wieder zu einer Einheitsquaternion gemacht werden.

Kapitel 6

Reglerauslegung

6.1 Eigenbewegung

6.1.1 Aufteilung der Zustandsgrößen in Längs- und Seitenbewegung

| | Ω_K | V_K | Φ | s |
|----------------|------------|-------|--------|---------------|
| Längsbewegung | q_K | u_K | w_K | Θ |
| Seitenbewegung | p_K | r_K | v_K | Φ Ψ |

Tabelle 6.1: Zustandsgrößen der Längs- und Seitenbewegung

6.1.2 Längsbewegung

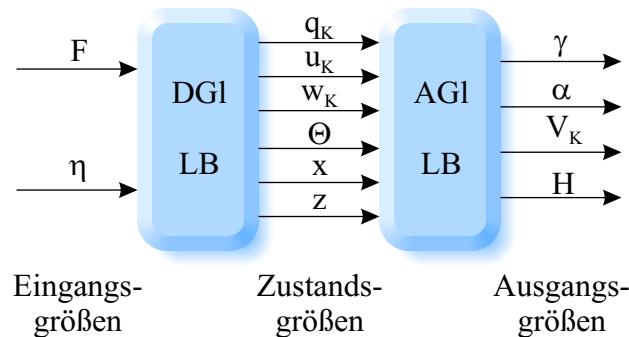


Abbildung 6.1: Differenzial- und Ausgangsgleichungen der Längsbewegung (ohne Wind)

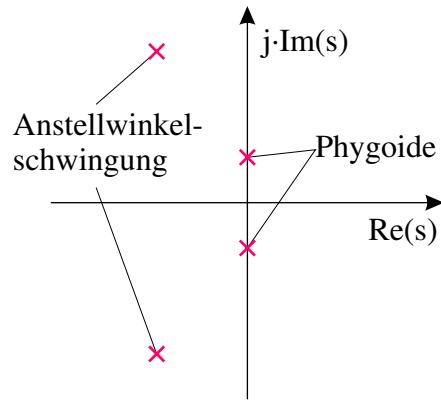


Abbildung 6.2: Polverteilung der Längsbewegung

Anstellwinkelschwingung

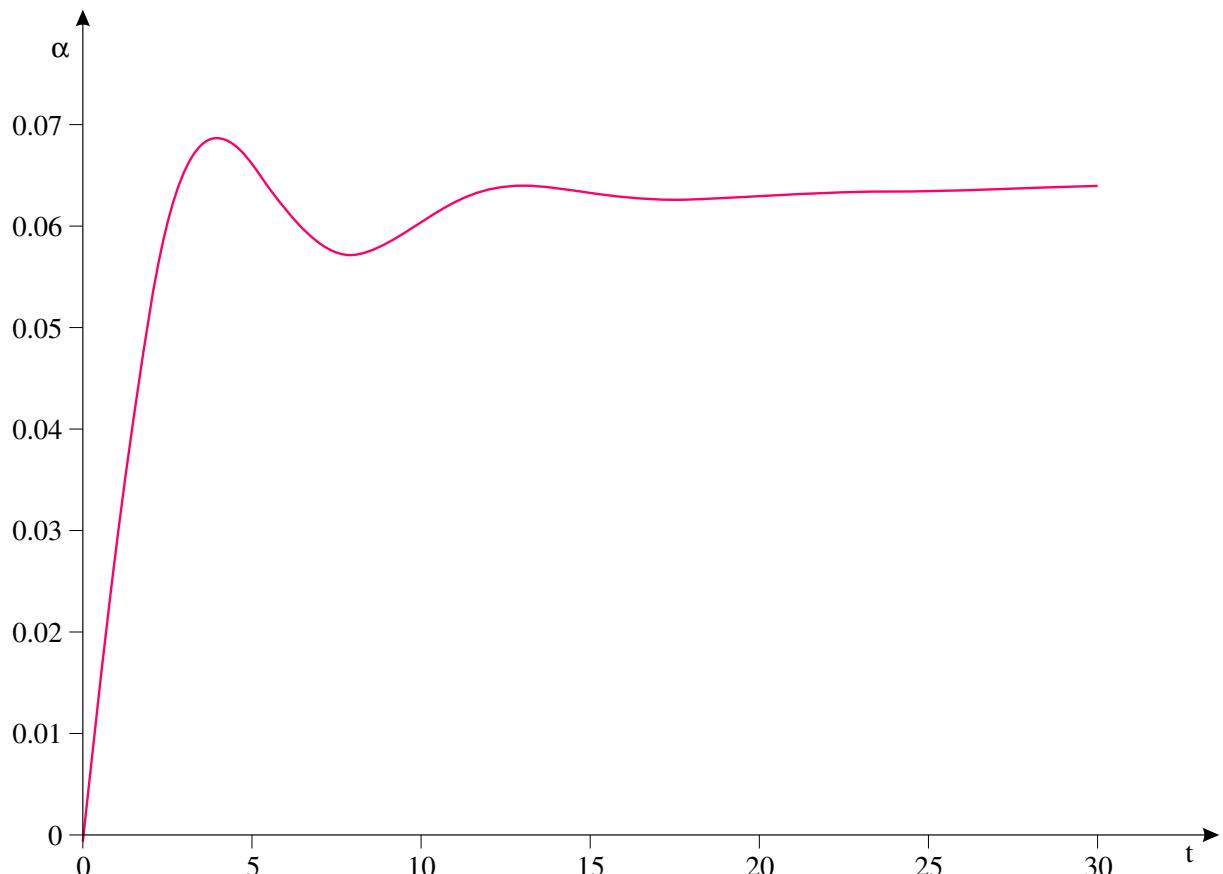


Abbildung 6.3: Anstellwinkelschwingung

- „ α -Schwingung“
- Nickschwingung in q_K , α , Θ
- Hohe Frequenz (z. B.: $f = 0.1 \text{ Hz}$, $T = 10 \text{ s}$)
- Mittlere Dämpfung (z. B.: $D = 0.5$)

Phygoide

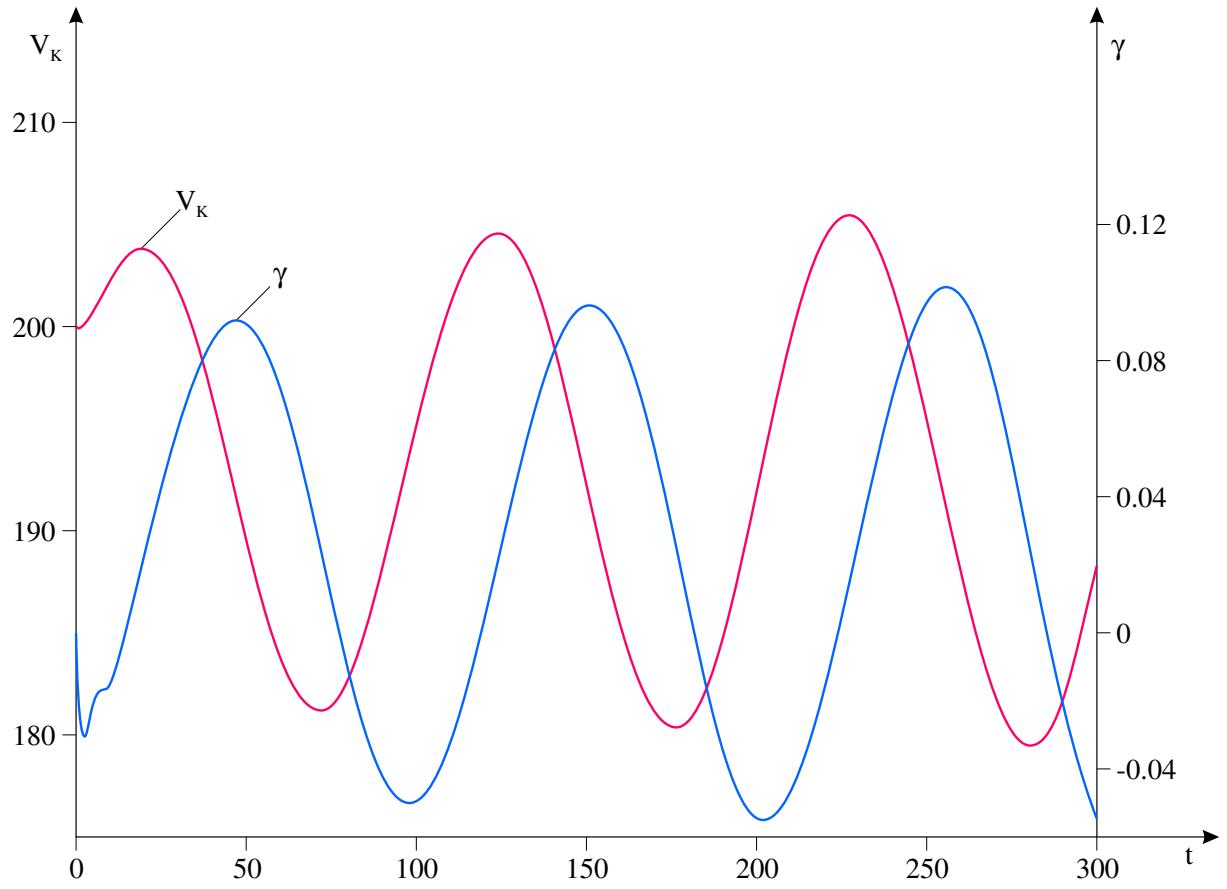


Abbildung 6.4: Phygoide

- „Energieschwingung“
- Bahnschwingung in V_k, γ
- Niedrige Frequenz (z. B.: $f = 0.01 \text{ Hz}$, $T = 100 \text{ s}$)
- Kann instabil werden (z. B.: $D = 0$)

6.1.3 Seitenbewegung

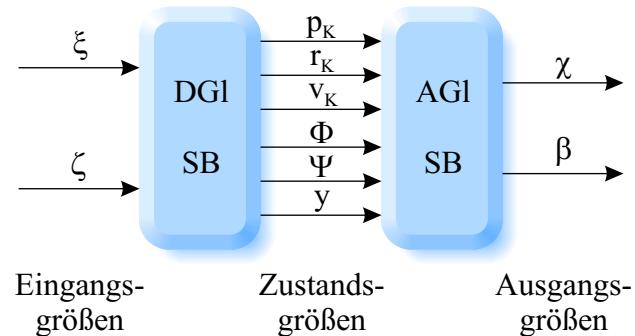


Abbildung 6.5: Differenzial- und Ausgangsgleichungen der Seitenbewegung (ohne Wind)

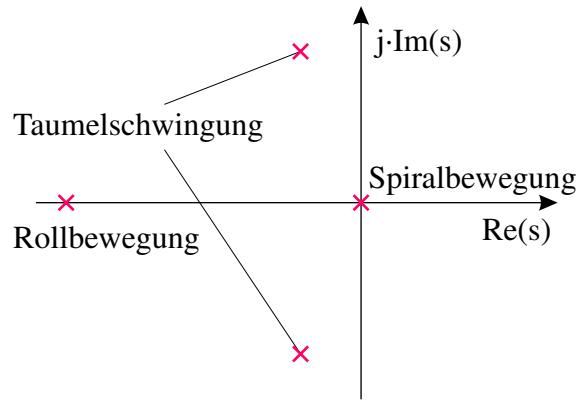


Abbildung 6.6: Polverteilung der Seitenbewegung

Taumelschwingung

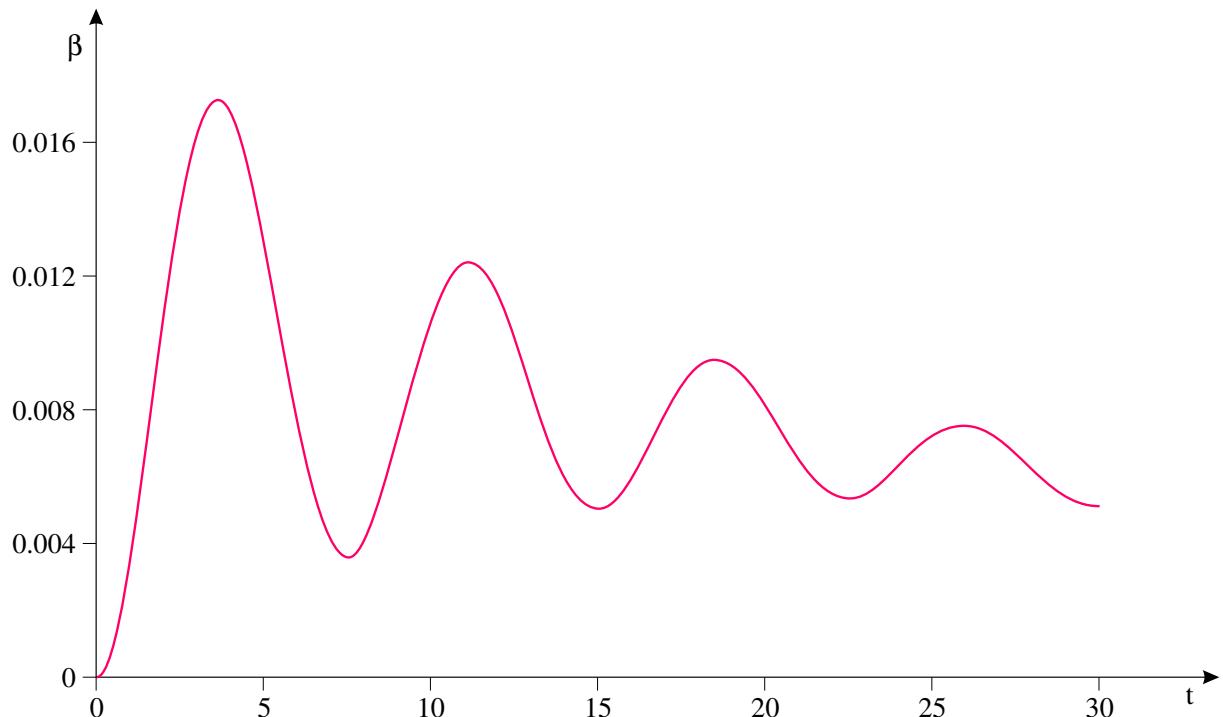


Abbildung 6.7: Taumelschwingung

- Drehschwingung in $\beta, \Psi, \Phi, p_k, r_k$
- Hohe Frequenz (z. B.: $f = 0.1 \text{ Hz}$, $T = 10 \text{ s}$)
- Niedrige Dämpfung (z. B.: $D = 0.1$)

Rollbewegung

- „Rolltiefpass“, „Rollverzögerung“
- Aperiodische Drehbewegung in p_k, Φ
- Zeitkonstante: z. B.: $T = 1 \text{ s}$

Spiralbewegung

- „Offener Integrator“ mit „etwas“ Rückführung
- ξ -Block \rightarrow stationärer Hängewinkel
- Kann instabil sein \rightarrow Spiralsturz

6.2 Trimmrechnung

Trimmen ist das Berechnen von Trimmgrößen (Eingangs- und Zustandsgrößen), sodass vorgegebene Trimmforderungen (Ausgangs- und Ableitungsgrößen) erfüllt sind. Durch die Trimmrechnung wird der (zumeist stationäre) Anfangszustand einer Simulation festgelegt.

6.2.1 Horizontaler Geradeausflug

Aufgabe: Es soll ein unbeschleunigter, schiebefreier, horizontaler Geradeausflug ohne Wind ausgetrimmt werden. Die relevanten Eingangs-, Zustands-, und Ausgangsgrößen der Längsbewegung lauten:

Eingangsgrößen:

$$\mathbf{u} = [F \quad \eta]^T$$

Zustandsgrößen:

$$\mathbf{x} = [q_{Kf} \quad u_{Kf} \quad w_{Kf} \quad \Theta]^T$$

Ausgangsgrößen:

$$\mathbf{v} = [V_K \quad \gamma \quad \alpha \quad \dots]^T$$

Erster Gedanke: Der horizontale Flug wird durch die Festlegung einer bestimmten Bahngeschwindigkeit V_K und durch die Forderung nach einem verschwindenden Bahnwinkel $\gamma = 0$ definiert. Diese beiden Trimmforderungen können durch die beiden Trimmgrößen Schub F und Höhenruder η erfüllt werden. Schub und Höhenruder stellen dabei sowohl den Energie- als auch den Momentenhaushalt der Längsbewegung so ein, dass ein unbeschleunigter Flug in konstanter Höhe möglich ist.

Zweiter Gedanke: Leider beeinflussen, physikalisch gesehen, Schub und Höhenruder nicht direkt die gewünschte Bahngeschwindigkeit und den Bahnwinkel. Schub und Höhenruder erzeugen Kräfte und Momente, die unmittelbar nur zu Beschleunigungen und Drehbeschleunigungen führen. Die (Dreh-)Beschleunigungen werden dann von den (Dreh-)Geschwindigkeitsintegratoren der Kinetik zu Geschwindigkeiten und Drehgeschwindigkeiten integriert. Im zweiten Integrationsschritt folgen daraus Position und Lage(-Winkel).

Beispielsweise erzeugt das Höhenruder η im Wesentlichen ein Nickmoment M , das über das Nickträgheitsmoment unmittelbar zu einer Nickbeschleunigung \dot{q}_K führt. Die erste Integration macht dann aus der Nickbeschleunigung eine Nickgeschwindigkeit q_K und der zweite Integrator erzeugt daraus den Nickwinkel Θ . Durch das Nicken verändert sich gleichzeitig der Anstellwinkel α , was zu einer Veränderung des Auftriebs A führt. Der veränderte Auftrieb (Vertikalkraft) erzeugt dann eine Vertikalbeschleunigung \dot{w}_K , die wiederum zu einer Vertikalgeschwindigkeit w_K integriert wird. Erst aus dieser Vertikalgeschwindigkeit resultiert eine vertikale Positionsänderung und damit die gewünschte Änderung des Bahnwinkels γ .

Langer Rede kurzer Sinn: Ein Trimmalgorithmus kann nicht direkt durch „Wackeln“ an der Trimmgröße Höhenruder die gewünschte Trimmforderung Bahnwinkel einstellen.

Dritter Gedanke: Dann müssen auch die an der Definition des gewünschten Flugzustands beteiligten internen Zustandsgrößen (q_{Kf} , u_{Kf} , w_{Kf} , Θ) mitgetrimmt werden. Die Bestimmung der Nickgeschwindigkeit q_{Kf} ist einfach. Sie muss für einen stationären Geradeausflug natürlich verschwinden, da das Flugzeug sonst permanent auf- bzw. abnicken würde. Für die Bestimmung der verbleibenden drei Trimmgrößen (u_{Kf} , w_{Kf} , Θ) müssen jetzt weitere drei Trimmforderungen gefunden werden. Diese folgen unmittelbar aus der Forderung nach einem unbeschleunigten Flug: Es dürfen weder Nickbeschleunigungen noch translatorische Beschleunigungen auftreten: $\dot{q}_{Kf} = \dot{u}_{Kf} = \dot{w}_{Kf} = 0$.

Wenn der Flugzustand dann ausgetrimmt ist, folgen alle weiteren Ausgangsgrößen automatisch: Der Anstellwinkel α beispielsweise errechnet sich bei reiner Längsbewegung ohne Wind direkt aus: $\alpha = \Theta - \gamma$.

6.2.2 Verallgemeinerung

Die am Beispiel der Flugzeuglängsbewegung erlangten Erkenntnisse lassen sich verallgemeinern. Ein allgemeines nichtlineares dynamisches System lässt sich durch eine Vektor-differenzialgleichung und eine algebraische Vektorausgangsgleichung beschreiben:

Vektordifferenzialgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Vektorausgangsgleichung:

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

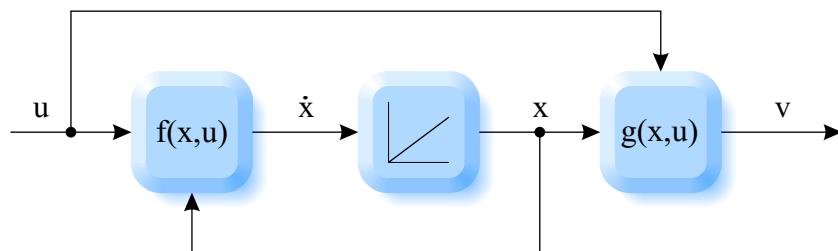


Abbildung 6.8: Allgemeines nichtlineares dynamisches System

Trimmforderungen (bekannt) Elemente von $\dot{\mathbf{x}}$ und \mathbf{v} (linke Seite der Gleichungen)

Trimmgrößen (gesucht) Elemente von \mathbf{x} und \mathbf{u} (rechte Seite der Gleichungen)

Vorgehensweise

1. Für jede Trimmforderung eine Trimmgröße freilassen, die die Forderung erfüllen (oder wenigstens beeinflussen) kann.
2. Für jede Trimmgröße eine Trimmforderung aufstellen, durch die die Trimmgröße definiert (oder wenigstens eingeschränkt) wird.
3. Die Elemente von \mathbf{x} und \mathbf{u} , die keine Trimmgrößen sind, auf feste Werte setzen.
4. Die Elemente von $\dot{\mathbf{x}}$ und \mathbf{v} , die keine Trimmforderungen sind, folgen automatisch.

6.2.3 Triebwerksdynamik

Jedes dynamische Untersystem (Stellerdynamik, Sensoren, Filter, Regler, ...) des zu trimmenden Gesamtsystems muss „mitgetrimmt“ werden. Wird beispielsweise ein Triebwerk als begrenztes System erster Ordnung modelliert und wird nach dem Schubkommando F_c gesucht, das eine gewünschte Bahngeschwindigkeit V_K bewirkt, so muss der Ausgang F des Schubintegrators als zusätzliche Trimmgröße und sein Eingang \dot{F} als weitere Trimmforderung aufgefasst werden. Natürlich wird im ausgetrimmten Zustand der Schub F gleich dem Schubkommando F_c sein; beide sind aber nicht bekannt und müssen daher gemeinsam vom Trimmprogramm ermittelt werden.

Jede zusätzliche Trimmgröße erfordert genau eine zusätzliche Trimmforderung. Daher wird für einen stationären Trimmpunkt (Schub konstant) die Ableitung des Schubes zu null gefordert: $\dot{F} = 0$.

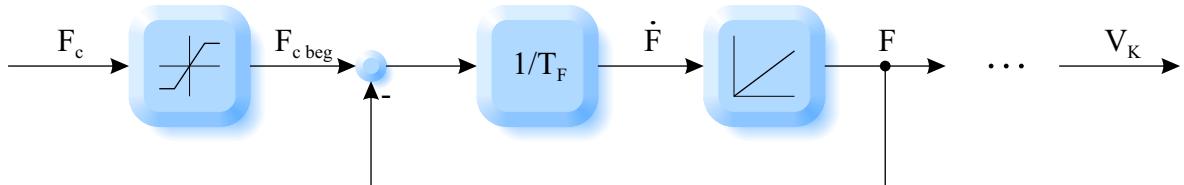


Abbildung 6.9: Triebwerksdynamik mit Begrenzer

Begrenzungen

Begrenzungen stellen für viele Trimmalgorithmen ernst zu nehmende Gegner dar. Üblicherweise variiert der Optimierer im Trimmprogramm nämlich die Trimmgrößen nach einem mehr oder weniger intelligenten Verfahren so lange, bis das die Trimmforderungen enthaltende Gütekriterium besser als eine vorgegebene Schranke geworden ist. Wenn aber während dieses Suchverfahrens der Begrenzer anspricht, weil der Trimmalgorithmus die Trimmgröße „probekhalber“ über ihren Maximalwert erhöht hat, bewirkt plötzlich eine kleine Variation der Trimmgröße gar keine Veränderung der Trimmforderungen mehr.

Der gradientenorientierte Trimmalgorithmus „weiß dann nicht mehr, in welche Richtung er weiteroptimieren soll“ und bricht mit einer Fehlermeldung ab.

In diesen Fällen hilft es häufig, die maximale Schrittweite der entsprechenden Trimmgröße zu reduzieren, damit der Algorithmus die Begrenzung nicht „aus Versehen“ in einem zu großen Schritt verletzt. Außerdem ist es natürlich sinnvoll, jede Trimmgröße auf einen geschätzten Anfangswert zu setzen, der möglichst nahe am erwarteten Trimmpunkt liegt. Wenn beispielsweise der maximale Schub eines Triebwerkes im Reiseflug 90 kN beträgt, macht es sicherlich mehr Sinn, den Anfangswert der Trimmgröße Schub auf vielleicht 60 kN zu setzen als auf 0 kN oder gar 100 kN.

6.3 Basisregler

Der Basisregler dämpft die Eigenbewegung (Nick-, Gier- und Rolldämpfer) und regelt Fahrt, Nickwinkel, Hängewinkel und Schiebewinkel. Die Kommandos für diese Eingangsgrößen des Basisreglers können entweder direkt vom Piloten (z. B. Sidestick kommandiert rate command attitude hold für Nick- und Hängewinkel) oder von einem überlagerten Bahnregelkreis kommen.

6.3.1 Basisregler der Längsbewegung

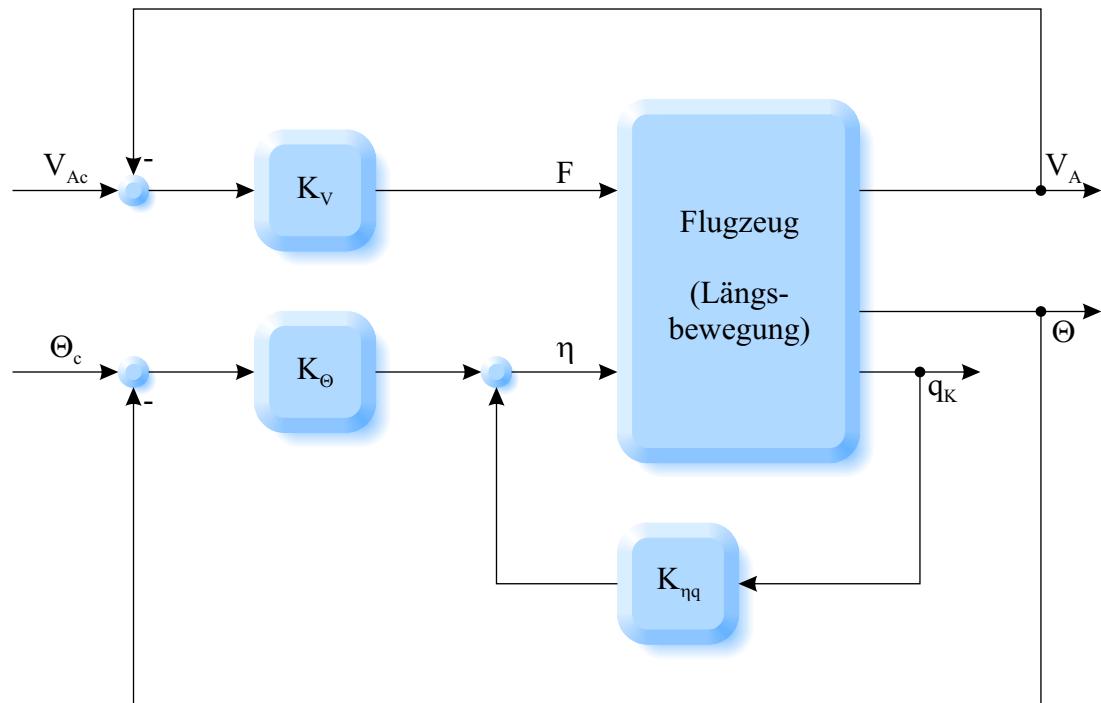


Abbildung 6.10: Basisregler der Längsbewegung

$K_{\eta q}$ Der **Nickdämpfer** verwendet das Höhenruder, um die Anstellwinkelschwingung zu dämpfen. Dabei wird die (gemessene) Nickgeschwindigkeit quasi mit einem Sollwert von null verglichen und das Höhenruder immer so ausgeschlagen, dass das entstehende Nickmoment und die daraus resultierende Nickbeschleunigung der Nickgeschwindigkeit entgegenwirkt.

- K_Θ Der **Nicklageregler** benutzt die gleiche Stellgröße (Höhenruder) wie der Nickdämpfer und sorgt für die Regelung des Nickwinkels. Der Nickwinkelsollwert kann dabei direkt vom Piloten (beispielsweise mittels des longitudinalen Sidesticks) oder von einem übergeordneten (kaskadierten) Bahnregler (Höhenregler, ...) vorgegeben werden.
- K_V Der **Fahrtregler** (Autothrottle) verwendet den Schub, um eine eingestellte Sollfahrt zu halten. Um einen stationären Regelfehler zu verhindern, kann der Fahrtregler einen I-Anteil besitzen.

6.3.2 Basisregler der Seitenbewegung

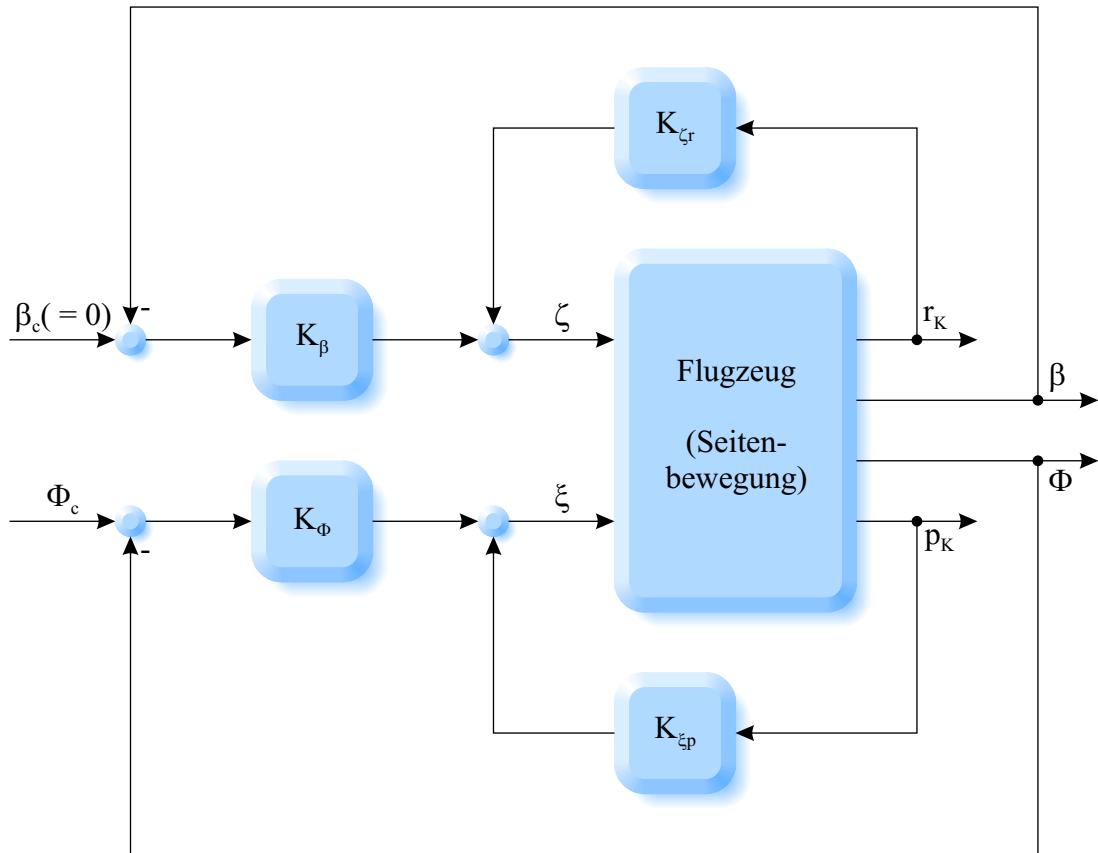


Abbildung 6.11: Basisregler der Seitenbewegung

- K_{ζ_r} Der **Gierdämpfer** misst die Giergeschwindigkeit und benutzt das Seitenruder, um die Taumelschwingung zu dämpfen. Während eines stationären Kurvenflugs sollte der Gierdämpfer möglichst nicht aktiv sein, um die dann gewollte Giergeschwindigkeit nicht zu unterdrücken (\rightarrow Verwendung eines Hochpasses, der konstante Giergeschwindigkeiten nicht „durchlässt“).
- K_{ξ_p} Der **Rolldämpfer** verwendet das Querruder, um die Rollzeitkonstante zu verändern.
- K_β Der **Schiebewinkelregler** benutzt das Seitenruder, um den Schiebewinkel zu regeln. Häufig, beispielsweise beim koordinierten (schiebewinkelfreien) Kurvenflug,

soll der Schiebewinkel verschwinden (Sollwert gleich null), um eine symmetrische, ökonomische Anströmung zu gewährleisten. Der Schiebewinkelsollwert kann beispielsweise mit den Pedalen kommandiert werden oder wird vom Autopiloten vorgegeben (z. B. beim Decrab-Manöver zum Ausrichten des Fahrwerkes in Landebahnrichtung beim Landeanflug mit Seitenwind).

- K_ϕ Der **Querlageregler** benutzt die gleiche Stellgröße (Querruder) wie der Rolldämpfer und sorgt für die Regelung des Hängewinkels. Der Hängewinkelsollwert kann dabei direkt vom Piloten (beispielsweise mittels des lateralnen Sidesticks) oder von einem übergeordneten (kaskadierten) Bahnregler (Kursregler, ...) vorgegeben werden.

6.4 Bahnregler

Der Bahnregler (Höhenregler und Bahnazimutregler) verwendet das „basisgeregelte“ Flugzeug im Sinne einer Kaskadenregelung als „modifizierte Regelstrecke“. Die Regelgrößen des Basisreglers (Längsneigungswinkel und Hängewinkel) werden dabei direkt vom Bahnregler kommandiert.

6.4.1 Kaskadenregelung

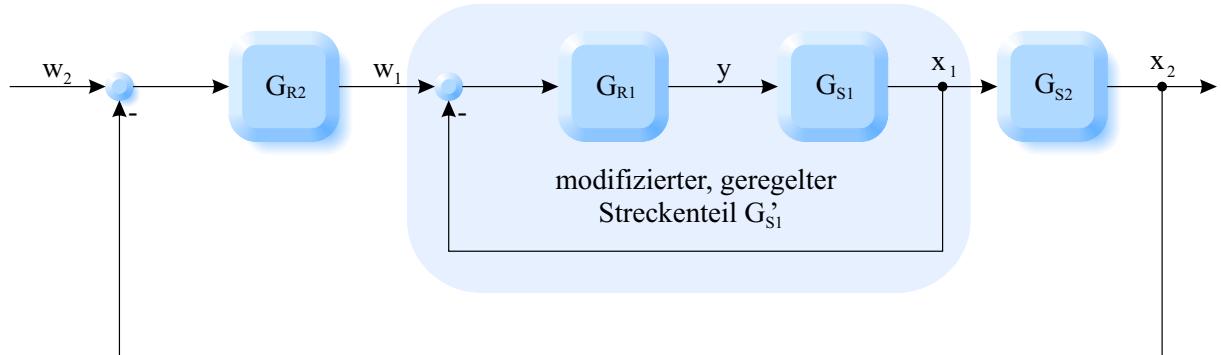


Abbildung 6.12: Kaskadenregelung

- Äußerer Regelkreis liefert Sollwert für inneren Regelkreis.
- Inneren Regelkreis schnell und ohne Führungsgenauigkeit auslegen.
- Äußer(st)er Regelkreis leistet Führungsgenauigkeit.

6.4.2 Höhen- und Bahnazimutregelung

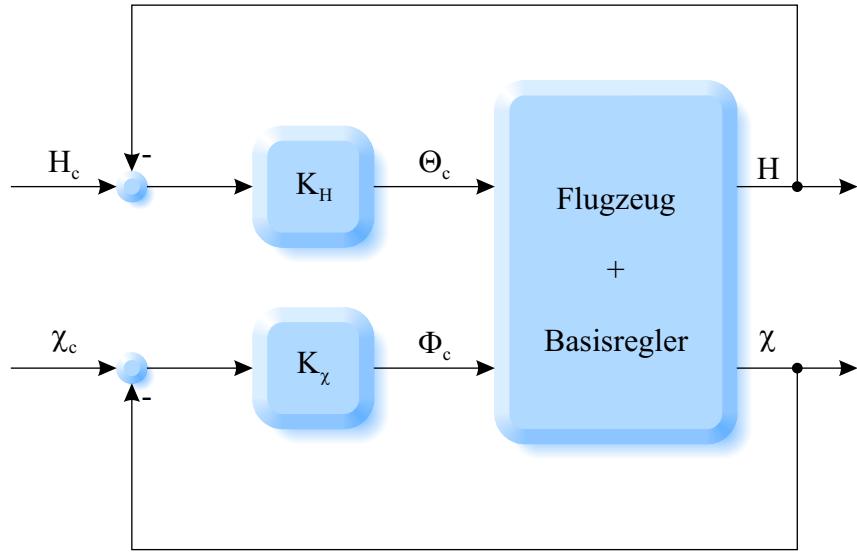


Abbildung 6.13: Höhen- und Bahnazimutregelung

- K_H Der **Höhenregler** hat in dieser Kaskadenregelung keinen direkten Zugriff auf das Höhenruder, sondern kommandiert einen Nicklagesollwert an den Basisregler der Längsbewegung, der dann seinerseits über das Höhenruder in den Momentenhaushalt des Flugzeugs eingreift, um den Längsneigungswinkel entsprechend einzustellen. Um stationäre Führungsgenauigkeit bei der Höhenregelung zu erreichen, kann der Höhenregler als PI(D)-Regler ausgelegt werden.
- K_χ Der **Bahnazimutregler** regelt den Bahnazimut, indem er einen Sollwert für den Hängewinkel an den Basisregler weitergibt. Alternativ zum Bahnazimut kann (z. B. aus Verfügbarkeitsgründen) der Gierwinkel als Regelgröße verwendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Deutsches Institut für Normung, *DIN 9300-1; Luft- und Raumfahrt; Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik; Bewegung des Luftfahrzeuges gegenüber der Luft; ISO 1151-1:1988 modifiziert*. [Online]. Available: <https://www.beuth.de/de/norm/din-9300-1/1608582>
- [2] ——, *DIN 9300-6; Luft- und Raumfahrt; Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik; Geometrie des Luftfahrzeugs; ISO 1151-6:1982 (Stand 1984) modifiziert*. [Online]. Available: <https://www.beuth.de/de/norm/din-9300-6/1608785>
- [3] J. J. Buchholz. (2016) Bezeichnungen der Luftfahrt. Hochschule Bremen. [Online]. Available: <https://m-server.fk5.hs-bremen.de/bezeichnungen>
- [4] R. Brockhaus, W. Alles, and R. Luckner, *Flugregelung*, 3rd ed. Springer, Berlin, 4 2011. [Online]. Available: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-01443-7>
- [5] J. J. Buchholz. (2018) Koordinatensysteme der Luftfahrt. Hochschule Bremen. [Online]. Available: <https://m-server.fk5.hs-bremen.de/kos/kos.html>
- [6] B. Etkin and L. D. Reid, *Dynamics of Flight: Stability and Control*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 11 1995. [Online]. Available: <http://amazon.de/o/ASIN/0471034185/>
- [7] J. B. Dabney and T. L. Harman, *Mastering Simulink*. Prentice Hall, 11 2003. [Online]. Available: <http://amazon.com/o/ASIN/0131424777/>
- [8] H. Mann, H. Schiffelgen, and R. Froriep, *Einführung in die Regelungstechnik*, 10th ed. Hanser Fachbuchverlag, 9 2005. [Online]. Available: <http://amazon.de/o/o/ASIN/3446403035/>
- [9] H. Unbehauen, *Regelungstechnik 1*, 14th ed. Vieweg+Teubner Verlag, 2 2007. [Online]. Available: <http://amazon.de/o/ASIN/3834802301/>
- [10] ——, *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*, 9th ed. Vieweg+Teubner, 3 2007. [Online]. Available: <http://amazon.de/o/ASIN/3528833483/>
- [11] O. Beucher, *MATLAB und Simulink: Grundlegende Einführung für Studenten und Ingenieure in der Praxis*, 4th ed. Pearson Studium, 6 2008. [Online]. Available: <http://amazon.de/o/ASIN/3827373409/>
- [12] H. Lutz and W. Wendt, *Taschenbuch der Regelungstechnik: mit MATLAB und Simulink*, 8th ed. Harri Deutsch, 3 2010. [Online]. Available: <http://amazon.de/o/ASIN/3817118597/>

- [13] Deutsches Institut für Normung, *DIN 9300-2; Luft- und Raumfahrt; Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik; Bewegungen des Luftfahrzeugs und der Atmosphäre gegenüber der Erde; ISO 1151-2:1985 (Stand 1987) modifiziert.* [Online]. Available: <https://www.beuth.de/de/norm/din-9300-2/1608720>
- [14] The Mathworks, *Matlab/Simulink*. [Online]. Available: <http://mathworks.com>

Empfehlungen

[8] eignet sich hervorragend als vorlesungsbegleitendes Lehrbuch, das in einer leicht verständlichen Sprache anhand zahlreicher Beispiele die Grundlagen der Regelungstechnik vertieft.

[9] beschreibt in etwas abstrakterer Form die klassischen Verfahren der Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, während [10] eine Einführung in Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme gibt.

Als reines praxisorientiertes kompaktes Nachschlagewerk kann [12] ein gutes Lehrbuch zwar nicht ersetzen, wohl aber sinnvoll ergänzen.

[11] spricht als recht knapp gehaltene Einführung in die Benutzung von MATLAB und Simulink den absoluten MATLAB-Anfänger an und kann mit seinen zahlreichen Übungsaufgaben zu weiteren eigenen Experimenten anregen.

[7] beschreibt nicht nur die grundlegende blockorientierte Arbeitsweise mit Simulink sondern auch weiterführende Konzepte wie Callbacks, S-Functions, Animationen, ...

[4] ist das deutschsprachige Standardwerk der Flugregelung, das auf 1006 Seiten jede Menge Hintergrundwissen auch zu den angrenzenden Disziplinen (Flugmechanik, Aerodynamik, Meteorologie, ...) liefert. Etwas lästig ist dabei nur der Preis von fast 200 €.

Index

A

Abtastzeit, 68
Achse, 79
Addition, 14
Adjunktenmatrix, 111
Aerodynamik, 73, 89
Aerodynamische Kraft, 89
Aerodynamische Krafteinheit, 89
Aerodynamische Nickgeschwindigkeit, 92
Algebraische Gleichung, 19
Amplitude, 28
Amplitudengang, 29, 31, 32
Amplitudenreserve, 57
Anfangswert, 23, 26
Anregelzeit, 61
Anstellwinkel, 81
Anstellwinkelschwingung, 124
Asymptotische Stabilität, 51
 atan2 , 86, 116
Aufladung, 34
Auftrieb, 89
Auftriebsbeiwert, 91
Auftriebsderivativ, 91
Auftriebskennlinie, 91
Ausgangsgröße, 15
Ausgleichszeit, 61, 64
Autopilot, 132
Autothrottle, 131
Azimut, 79

B

Badewanne, 40, 94
Bahn, 73
Bahnazimut, 80
Bahnazimutregler, 132, 133
Bahndrehgeschwindigkeitsdifferenzialgleichung,
 108
Bahnfest, 73
Bahngeschwindigkeit, 74, 85, 101
Bahngeschwindigkeitsdifferenzialgleichung, 105
Bahnregler, 132
Bahnschwingung, 125
Bahnwinkel, 80
Basisregler, 130
Begrenzung, 95, 129
Beiwert, 89
Betrag, 30
Bezugsflügelfläche, 89
BIBO-Stabilität, 51
Blockschaltbild, 50
Bodediagramm, 29
Böe, 96
Brett, 94

C
Chien, Hrones und Reswick, 64

D
Dämpfung, 22, 28
Derivativ, 91
Determinante, 111
Deviationsmoment, 110
Dezibel, 31
D-Glied, 42
Differenzengleichung, 69
Differenzialgleichung, 23, 49, 121
Differenzierer, 42
Digitale Regelung, 68
Dirac-Stoß, 18, 44
Divergenz, 97
Drall, 108
Drehachse, 115
Drehbeschleunigung, 111
Drehfreiheit, 97
Drehgeschwindigkeit, 73
Drehimpuls, 108
Drehung, 79
Drehwinkel, 115
Drehwinkeldifferenzialgleichung, 104
Dyadisches Produkt, 97
Dynamisch, 19, 95

- E**
- Eigenbewegung, 123
 - Eigenfrequenz, 22, 28
 - Eingangsgröße, 15
 - Einheitsquaternion, 114
 - Einstellregel, 63
 - Endwert, 26
 - Energieinhalt, 95
 - Energiespeicher, 40, 95
 - Erdlotfest, 73
 - Eulerterm, 105
 - Eulerwinkel, 73, 104, 115, 117
- F**
- Fahrtregler, 131
 - Feder-Masse-Schwinger, 37
 - Fehlermeldung, 112
 - Flugbahnenfest, 73
 - Fluggeschwindigkeit, 74, 84
 - Flugwindfest, 73
 - Flugzeugfest, 73
 - Förderband, 47
 - Freiheitsgrad, 102
 - Frequenzgang, 28
 - Führungsgenauigkeit, 132
 - Führungsübertragungsfunktion, 59
- G**
- Gekoppelt, 102
 - Geodäisch, 73
 - Gerätenahe Darstellung, 45
 - Gesamtübertragungsfunktion, 53
 - Geschwindigkeit, 58, 73, 74
 - Gewichtskraft, 74
 - Gierdämpfer, 93, 131
 - Gieren, 102
 - Giermoment, 76, 90, 112
 - Giermomentenbeiwert, 91
 - Gierseitenkraft, 93
 - Gierwinkel, 79
 - Gimbal Lock, 112
 - Gradient, 97
 - Gravitationsvektor, 74
 - Grenzstabil, 51, 57
 - Grenzwertsatz, 26, 60
 - Grundlegendes Stabilitätskriterium, 52
 - Gütekriterium, 61, 129
- H**
- Halbebene, 27
- Hängewinkel, 79
 - Hauptdiagonale, 109
 - Hauptträgheitsachse, 110
 - Hauptwertebereich, 79
 - Hebelarm, 110
 - Hilfsgröße, 64
 - Hochpass, 131
 - Höhenregler, 132, 133
 - Höhenruder, 75, 130
 - Horizontaler Geradeausflug, 127
- I**
- I-Glied, 40
 - Imaginärteil, 30, 112
 - Impuls, 18
 - Impulsänderung, 105
 - Impulsantwort, 22, 51
 - Inertiale Ableitung, 105
 - Inertialsystem, 105
 - Instabil, 16, 27, 52
 - Integralkriterium, 62
 - Integrator, 40, 95
 - Inversion, 111
 - I-Regler, 60
 - Istwert, 15
- J**
- J. F. Kennedy, 96
 - Jakobi-Matrix, 97
- K**
- Kartesisch, 84
 - Kaskadenregelung, 132
 - Kennlinie, 19
 - Kinetik, 102
 - Koeffizientenvergleich, 25
 - Kompensation, 66
 - Komplexe Zahl, 29
 - Kompromiss, 62, 122
 - Kondensator, 34
 - Konjugiert komplex, 27
 - Konjugierte Quaternion, 113
 - Koordinatensystem, 72, 78, 115
 - Koordinatentransformation, 76
 - Körperfest, 73
 - Kostenfunktion, 62
 - Kraft, 73
 - Kreis, 101
 - Kreuzprodukt, 97, 105

- Kritischer Punkt, 56
 Kugelkoordinate, 84
 Kunststoffente, 94
 Kursregler, 132
 Kurvenflug, 107
- L**
 Lagewinkel, 73
 Längsbewegung, 123, 130
 Längsneigung, 79
 Laplace-Transformation, 23
 Laufzeit, 47
 Leistungsdichte, 96
 Linear, 19
 Lineare Derivativ-Aerodynamik, 91
 Luftpumpe, 93
- M**
 Machzahl, 92, 93
 Matrix, 49
 Matrixschreibweise, 117
 Matrizeninversion, 109
 Messglied, 56
 Mitkopplung, 55
 Moment, 73
- N**
 Nabla, 96
 Nachstellzeit, 45, 64
 Newton'sches Axiom, 111
 Nichtlinear, 19, 102
 Nickdämpfer, 93, 130
 Nicken, 102
 Nicklageregler, 131
 Nicklagesollwert, 133
 Nickmoment, 75, 90
 Nickschwingung, 124
 Nickwinkel, 79
 Normalform, 21
 Normierung, 92
 Nullstelle, 27
 Nullwiderstand, 90
 Numerische Simulation, 122
 Nyquistkriterium, 55, 58
 Nyquistortskurve, 29
- O**
 Offener Kreis, 54, 57
- P**
 Parallelschaltung, 45
 Partialbruchzerlegung, 24
 Pedal, 76
 Periodendauer, 26
 P-Glied, 33
 Phase, 30
 Phasengang, 29, 31, 32
 Phasenverschiebung, 28, 55
 Phygoide, 125
 PID-Glied, 44
 PID-Regler, 63
 Pol, 27
 Position, 72
 Positions differenzialgleichung, 103
 Produktregel, 105
 P-T1, 34
 P-T2, 37
- Q**
 Quaternion, 112
 Quaternionenprodukt, 113
 Quellenfreiheit, 97
 Querkraft, 89
 Querkraftbeiwert, 91
 Querlageregler, 132
 Querneigung, 79
 Querruder, 75, 131
- R**
 Rampe, 17
 Realteil, 30, 112
 Rechteckregel, 69
 Rechtshändig, 72
 Regelabweichung, 15, 58–60, 62
 Regeldifferenz, 15
 Regelfehler, 15
 Regelfläche, 62
 Regelkreis, 53
 Regelung, 16
 Reglerauslegung, 51, 123
 Reglerentwurf, 58
 Regleroptimierung, 63
 Reglerverstärkung, 54
 Rollbeschleunigung, 112
 Rollbewegung, 126
 Rolldämpfer, 131
 Rollen, 102
 Rollmoment, 75, 89, 112
 Rollmomentenbeiwert, 91
 Rollwinkel, 79

- Rosa Rauschen, 96
 Rotation, 97
 Rückkopplung, 55
 Rücktransformation, 25, 83
- S**
 Scherwind, 96
 Schieberollmoment, 93
 Schiebewinkel, 81
 Schiebewinkelregler, 131
 Schub, 73, 74, 94, 131
 Schubmoment, 74, 94
 Schubvektor, 93
 Schubvektorangriffspunkt, 94
 Schwinger zweiter Ordnung, 21, 37
 Seitenbewegung, 125, 131
 Seitenruder, 131
 Simulation, 63
 Sinus, 18
 Skalarfeld, 97
 Skalarprodukt, 97
 Sollfahrt, 131
 Sollschub, 94
 Sollwert, 15
 Sphärisch, 84
 Spiralbewegung, 127
 Sprung, 17
 Sprungantwort, 23, 24
 Stabilität, 28, 51, 58
 Stabilitätsrand, 64
 Stationär, 60
 Statisch, 19
 Staudruck, 89
 Stellaufwand, 63
 Stellerdynamik, 94
 Stellgröße, 15, 75
 Steuerknüppel, 75
 Steuerkurs, 79
 Steuerung, 16, 67
 Störgrößenaufschaltung, 66
 Störgröße, 15, 59
 Störübertragungsfunktion, 59
 Störung, 67
 Symmetrisch, 110
- Totzeit, 47, 95
 Trägheitsmoment, 110
 Trägheitstensor, 109
 Transformationsmatrix, 81, 114
 Triebwerk, 93
 Triebwerksdynamik, 129
 Trimmforderung, 129
 Trimmgröße, 129
 Trimmrechnung, 127
 Trochoide, 100
 Turbulenz, 96
 Tustinformel, 69
- U**
 Überlagerungsprinzip, 20
 Überschwingweite, 61
 Übertragungsfunktion, 15, 24
- V**
 Vektorausgangsgleichung, 49, 128
 Vektordifferenzialgleichung, 49, 102, 128
 Vektorfeld, 97
 Verstärkungsfaktor, 22
 Verstärkungsprinzip, 20
 Verzögerungsglied, 34, 37
 Verzugszeit, 61, 64
 Verzweigung, 14
 Voll laufen, 95
 Vorhaltzeit, 45, 64
 Vorsteuerung, 67
 Vorwärtsübertragungsfunktion, 53
- W**
 Wasser, 40, 94
 Wasserpegel, 94
 Weißes Rauschen, 96
 Wendetangente, 64
 Widerstand, 34, 89
 Widerstandspolare, 90
 Wind, 73, 96
 Windfahnenstabilität, 93
 Windfeld, 100
 Windgeschwindigkeit, 74
 Windgradient, 96
- Z**
 Zentripetalbeschleunigung, 108
 Ziegler und Nichols, 64
 z-Transformation, 69
 Zustandsraumdarstellung, 49

Zustandsvariable, 49

Zustandsvektor, 102

Zykloide, 100